



Università degli Studi di Cagliari

FACOLTÀ DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

Onde di Elliott

Applicazioni dei frattali all'economia

Candidato:

Stefania Marra

Matricola 60/65/49221

Relatore:

Lucio Cadeddu

Indice

1	Introduzione	3
2	Biografia	4
3	La successione di Fibonacci	11
4	Frattali	16
4.1	Misura e dimensione	16
4.1.1	Alcuni aspetti base sulla teoria della misura	16
4.1.2	Misura di Hausdorff	19
4.1.3	Dimensione di Hausdorff	20
4.2	Alcuni esempi di frattali e Autosimilarità	20
4.2.1	Curve di dimensione frazionaria	20
4.2.2	Gli insiemi autosimili o autosimilari	22
4.2.3	Esempi di insiemi autosimili	24
5	La teoria delle onde di Elliott	29
5.1	Caratteristiche delle diverse onde	32
5.2	L'analisi frattale	36
5.2.1	Un esempio reale	37
5.3	Conclusione	39
	Bibliografia e Sitigrafia	41

Capitolo 1

Introduzione

Questa tesi vuole essere un'introduzione ai principi della teoria delle onde di Elliott con applicazioni agli andamenti della borsa e dell'economia.

Con il termine **analisi tecnica** ci si riferisce comunemente all'attività di studio dei mercati finanziari dal punto di vista grafico: si studia cioè l'oscillazione dei prezzi passati (di un dato titolo o indice o valuta) al fine di ricavare delle proiezioni di prezzo e di movimento future. Si cerca quindi di ottenere delle previsioni il più possibile vicine alle prossime oscillazioni reali. L'analisi tecnica non prende quindi in considerazione dati economici, di bilancio, rumors e/o notizie di mercato. La tecnica di previsione per eccellenza è la Teoria delle Onde di R.N. Elliott (Elliott Wave Principle), tecnica questa poco conosciuta (ed applicata) in Italia ma molto utilizzata nei Paesi anglosassoni, patria dell'analisi tecnica.

Il primo capitolo è dedicato alla biografia di Ralph Nelson Elliott, nel secondo capitolo si trova un richiamo sulle proprietà fondamentali della successione di Fibonacci. Nel terzo capitolo si trova invece una breve introduzione sulla geometria frattale. Le dimostrazioni sono state tralasciate per non appesantire la tesi, il cui oggetto principale non sono i frattali in sé; le dimostrazioni complete sono comunque disponibili nel testo apposito indicato in bibliografia.

Nel quarto capitolo si trova la presentazione della teoria delle curve di Elliott e una sua attuale applicazione ad un titolo Unipol.

Capitolo 2

Biografia

Nel 1871, nell'epoca della conquista del West e del boom della ferrovia, nasce in California Ralph Nelson Elliott il padre della "Teoria delle onde".



Figura 2.1: Ralph Nelson Elliott

Le ferrovie ebbero, inizialmente, un ruolo centrale nella vita di Elliot, nella sua giovinezza lavorò come telegrafista, dispaccista ferroviario, agente di stazione, stenografo e contabile del settore ferroviario prima, e in quello dei pubblici servizi poi. Wall Street era lontana anni luce dal mondo di Elliott, tutto si sarebbe potuto pensare tranne che un giorno Ralph Nelson Elliott sarebbe stato ricordato per i suoi contributi originali e dirompenti all'analisi tecnica dei mercati finanziari.

La vita di Elliott non procedette sui binari uniformi di un treno. Lo studio della contabilità faceva presagire un futuro come autore di testi scolastici piuttosto che di studioso dei mercati azionari. Come lui stesso amava sottolineare, l'applicazione del principio delle onde sul mercato azionario avveniva solo durante «la quinta onda della sua vita», quando, a 64 anni, iniziò una nuova avventura che lo consacrerà tra gli studiosi dei mercati più conosciuti.

Facciamo un passo indietro, cercando di capire come Elliott sviluppò la sua famosa teoria delle onde.

La carriera di contabile procedeva a gonfie vele, Elliott trascorse sei anni a New York, redigendo rendiconti e situazioni patrimoniali per caffè e ristoranti, alcuni dei quali, per ironia della sorte, dislocati proprio nella comunità finanziaria di Wall Street. Non si può certo dire che questa occupazione fosse giudicata secondaria o temporanea da Elliott, il quale al contrario andava convincendosi che si sarebbe occupato di giornalmastri e bollette fino alla fine dei suoi giorni, né si può dire che la sua fosse un'attività di routine: sebbene localizzato a New York, il suo impiego lo portava a viaggiare molto, passando dal Canada all'Europa, dalla costa occidentale degli Stati Uniti all'America Centrale. Ma Elliott si stava affermando nell'arte della contabilità con sempre maggior convinzione, visto che ricoprì spesso incarichi esecutivi in compagnie ferroviarie del Messico e dell'America Centrale, dove fu chiamato per compiti di ristrutturazione e riorganizzazione. All'inizio degli anni '20 tornò ad occuparsi di ristoranti e in questo campo la sua preparazione era tale che iniziò a scrivere regolarmente articoli per il periodico specializzato "The Room and Gift Shop Magazine".

Nel 1924 la Columbia University lo invitò a discutere del tema nelle sue aule e più tardi iniziò a scrivere un libro che fu pubblicato nel 1926 dalla Little Brown & Co. con il titolo: "The Room and Cafeteriae Management", e che ebbe l'onore di essere recensito dal "New York Herold Tribune". Uno dei più profondi conoscitori di Elliott, Robert Prechter jr., ha sottolineato la sua cura e meticolosità non solo negli aspetti sostanziali del testo, ma anche in quelli più squisitamente estetici e formali, tutti elementi che rispecchiavano la sua personalità e che si sarebbero ritrovati più tardi nella stesura delle opere per cui oggi è ricordato. Alla fine del 1926, durante uno dei suoi numerosi viaggi in America Centrale, Elliott fu colpito da una malattia che lo costrinse a dimettersi dal suo incarico presso le ferrovie centroamericane e a ritirarsi a Los Angeles. Il suo stato comunque gli consentì di dedicarsi ad una intensa attività di marketing a favore delle sue pubblicazioni, così Elliott impiegò i primi sei mesi dell'anno inviando copie dei suoi libri a librerie specializzate, preparando recensioni e individuando la clientela di una sua improbabile nuova attività come consulente amministrativo di esercizi pubblici. La malattia che lo aveva colpito, invece di migliorare, peggiorava sempre più. Nel 1929 le sue condizioni si aggravarono, per cui i propositi di costituire un'impresa di consulenza dovettero essere abbandonati. Elliott visse gli anni del boom economico americano, della febbrile attività produttiva, e delle conseguenti

speculazioni spettacolari in borsa, in cui tutti potevano facilmente arricchirsi. Ma, quando il mercato azionario americano, nell'ottobre del 1929, subì il più grave crollo della sua storia, la realtà fu sotto gli occhi dei risparmiatori che guardavano increduli i loro risparmi volatilizzarsi.

Questi avvenimenti eccitarono la mente di Elliott che approfittò della malattia che lo costringeva a letto per avvicinarsi allo studio del comportamento del mercato azionario. Passaggio obbligato fu lo studio della teoria di **Dow** e delle opere dei suoi allievi, in particolare Robert Rhea, con il suo libro "Dow theory comment". Elliott seguì il classico percorso di ogni appassionato di trading, lesse ogni libro disponibile e condusse una lunga serie di studi sui grafici della borsa americana su base annuale, mensile, settimanale, giornaliera, fino ai 30 minuti, coprendo 75 anni di storia. Nel 1934 gli si parò davanti agli occhi la scoperta che gli rivoluzionò l'esistenza: il comportamento del mercato era riassumibile e sintetizzabile in una serie di principi applicabili in ogni arco temporale e in ogni mercato. E fu così che, all'età di 64 anni, Elliott iniziò quella che più tardi etichettò come la "quinta onda" della sua vita.

Il 1934 era ormai alla fine e lo stato delle teorie di Elliott era giunto ad un livello talmente avanzato che decise di renderle parzialmente pubbliche. Elliott era da tempo abbonato ad una pubblicazione della Investment Counsel, una società fondata e diretta da Charles Collins, il quale, in data 2 dicembre 1934, si vide recapitare una lettera contrassegnata dalla dicitura "personale e confidenziale" in cui Elliott spiegava di aver scoperto una nuova caratteristica del mercato azionario che andava ad integrare la teoria di Dow. Questa caratteristica, secondo Elliott, si poggiava su tre pilastri:

1. identificazione della struttura delle onde;
2. classificazione del loro grado;
3. previsione temporale.

Spedì in seguito a Collins un'esposizione sintetica del suo "Principio delle cinque onde". Collins iniziò a rispondere personalmente alle lettere di Elliott solo all'inizio del '35, pur congratulandosi per la precisione delle previsioni, lamentava le incertezze su cui si poggiava la teoria, incertezze che talvolta spingevano Elliott a cambiare idea e a ricontare le onde.

Il 15 febbraio, Elliott inviò a Collins uno scritto, intitolato "**The wave principle**", contenente tutti i concetti e i principi fino ad allora fissati. Più tardi ebbe modo di affermare candidamente di ignorare il motivo per cui il mercato si muovesse sviluppandosi continuamente nella struttura "cinque

onde-tre onde” e forse l’avrebbe ignorato per sempre, poiché quella era una legge naturale. Evidentemente, si stavano ponendo le basi per la stesura della più importante opera di Elliott, ”The wave principle” e ”Nature’s law”. Ma qualcosa ancora mancava.

Quel qualcosa glielo fornì Collins, il quale, venuto meno ormai lo scetticismo verso le teorie esposte dal suo brillante corrispondente, si prodigava di fargli pervenire libri, dispense, pubblicazioni e periodici: fra tutto questo, Elliott apprezzò particolarmente il materiale sulla serie numerica di Fibonacci, che gli fornì l’appiglio matematico per completare la sua teoria nella versione finale. Nel frattempo, i meriti delle previsioni di Elliott furono sempre più evidenti. Il 13 marzo 1935, Elliott inviò a Collins il famoso telegramma in cui preannunciava, con una precisione notarile, la fine del *bear market* (mercato ribassista) e l’inizio di una nuova fase di ripresa. Due mesi dopo quella previsione si rivelò così eccezionalmente corretta e tempestiva che Collins, impressionato dal suo dogmatismo e dalla sua accuratezza e convinto che la teoria delle onde avrebbe fatto molta strada, propose ad Elliott di far partire un periodo di consulenze per la Investment Counsecil Inc.

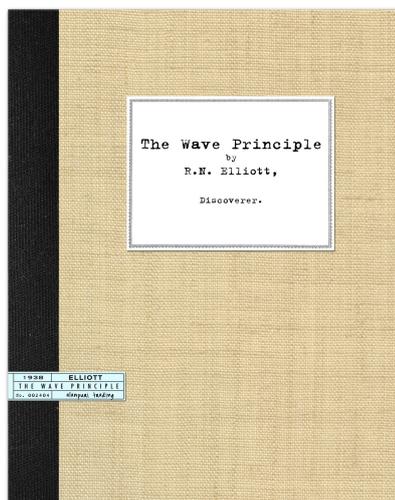


Figura 2.2: The wave principle

Il libro ”The wave principle” fu ufficialmente pubblicato il 31 agosto 1938; tiratura: 500 copie. Tre mesi dopo, Elliott pubblicò la prima di una lunga serie di ”interpretative letters”, consistenti in alcune pagine, da una a quattro, che furono pubblicate irregolarmente (dalle tre alle sette volte l’anno) fino al 1945. Nel 1939, grazie alle intercessioni di Collins, Elliott conobbe

l'editore di "Financial World", che gli commissionò una serie di articoli per il suo periodico. La prima di queste monografie fu pubblicata il 5 aprile e segnò la definitiva consacrazione di Ralph Nelson Elliott fra la comunità finanziaria di Wall Street. L'attività di Elliott a partire dall'inizio degli anni '40 si fece ancor più febbrile: gli articoli sul Financial World gli diedero lo spunto per la realizzazione di un servizio di formazione che comprendeva la pubblicazione di una serie di opere monotematiche, dove approfondiva concetti già toccati in termini generali; da ricordare in particolare titoli quali: "Alternation", "The basis of the wave principle", "The law of motion" e "Nature's law".

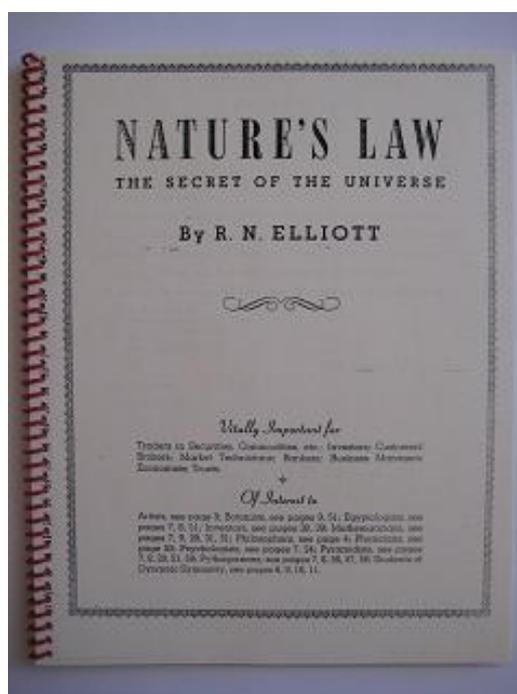


Figura 2.3: Nature's Law

Gli studi di Elliott andavano avanti, la prima metà degli anni '40 va ricordata per l'approfondimento di tematiche non propriamente finanziarie: filosofia, arte, egittologia, matematica, fisica e botanica. Tutto ciò che sembrava essere interessato dai cieli e dalle ondate delle emozioni umane ricadeva nella sfera di interessi di Elliott, il quale, ormai settantenne, si andava convincendo dell'esistenza di una **progressione naturale** governata da leggi universali. Gli studi e le letture divennero frenetici, mossi quasi dalla volontà di fare in tempo a chiudere il cerchio, prima che la morte sopraggiungesse.

Poco dopo la pubblicazione della sua ultima opera, Elliott perse la moglie. Degli ultimi due anni della sua vita, si ricordano le difficoltà legate al suo stato fisico e finanziario, che indussero i suoi amici a finanziare la sua permanenza presso un ospedale di New York. Fra questi amici c'era Charles Collins, con cui Elliott continuò a vedersi, fino alla morte che sopraggiunse il 15 gennaio 1948.

Elliott è considerato ancora oggi dai suoi estimatori l'unico degno successore di Dow nell'analisi dei movimenti dei mercati per essere riuscito ad introdurre una serie di definizioni più precise per ogni singola fase di mercato; in particolare aggiunse una serie di elementi con uno specifico risvolto previsionale, ovvero non più mera individuazione della tendenza di mercato, ma anche calcolo dei livelli di prezzo raggiungibili. Va detto, peraltro, che l'approccio di Elliott era volto a trovare una sintesi delle leggi che governano i fenomeni naturali, dei quali il mercato azionario costituisce semplicemente un aspetto; infatti egli affidava grande importanza all'osservazione sistematica della natura per coglierne i cicli più significativi. Essendo il movimento dei prezzi di mercato il prodotto di un'attività umana e quindi soggetta a regole naturali, *esso tende ad esprimere sequenze ricorrenti di onde rialziste e ribassiste, riconducibili nel loro insieme ad un modello generale.*

Di qui, appunto, il principio dell'onda, che si fonda infatti sul presupposto che ogni mercato rappresenta un fenomeno alimentato da flussi economici indotti da correnti psicologiche governate da leggi naturali. Il mercato deve essere considerato un fenomeno creato ed alimentato dall'uomo e pertanto permeato da tutti quegli atteggiamenti irrazionali che caratterizzano ogni giorno l'insieme degli operatori. Questi comportamenti diffusi, si esprimono nei prezzi attraverso fasi ricorrenti che si prestano ad essere analizzate per individuare dei modelli caratteristici. In altre parole, la borsa è per Elliott *un fenomeno di natura psicologica, che misura la dinamica pessimismo/ottimismo più che le reali condizioni delle imprese; il mercato non registra sostanzialmente gli eventi politici, economico-sociali, bensì le reazioni dell'uomo a questi eventi.*

Il pensiero di Elliot

Elliott non è quasi mai visto come un analista tecnico vero e proprio e le sue teorie sono considerate come qualcosa di oscuro, o comunque viste con una certa dose di diffidenza o sufficienza da parte degli altri analisti.

Se si vaglia attentamente la sua opera, si vede comunque come i punti di contatto con l'analisi tecnica "classica" sono numerosi. Anche Elliott, infatti, utilizzò le linee di trend (ad esempio riprendendo i principi di Dow, per il quale una fase rialzista è costituita da tre "upward swings" che subiscono correzioni più o meno profonde), studiò i volumi in maniera affine a quella classica e trattò il fattore psicologico come la forza primaria dei movimenti delle azioni. *La sua teoria del mercato fa però parte di una idea generale del mondo, di cui i mercati finanziari sono solo una espressione.*

Il suo metodo è infatti di tipo fideistico (tra fede e ragione, è incline a seguire la prima senza tener conto della seconda) e coinvolge tutte le forme della natura (non a caso la sua opera definitiva è intitolata Nature's Law), cercando di ritrovare una sintesi delle leggi che regolano i fenomeni naturali, sia personali che collettivi, di cui la Borsa è un semplice aspetto. Alla base della sua opera vi è l'osservazione che la regolarità ritmica è stata la regola del creato dall'inizio dei tempi. In particolare il principio base che guida il mondo e regola lo sviluppo di ogni evento ed essere vivente è la successione matematica di Fibonacci.

Tale legge della natura (in particolare la regola del tre su cinque) spiega quell'ordine ritmico che contraddistingue tutti gli eventi e che sembra dare loro un andamento ricorrente. Questa legge sarebbe in grado di spiegare tutti i comportamenti dell'uomo e quindi anche il mercato azionario che, sintesi delle sue speranze, aspettative e paure, non vi si sottrarrebbe. In particolare Elliott sostiene che il mercato è un fenomeno di natura psicologica che esprime il rapporto ottimismo/pessimismo più che i fondamentali economici delle imprese.

La teoria di Elliott funziona più di tutto su indici e titoli a grande capitalizzazione, che rappresentano la psicologia di un gran numero di investitori. La sua utilità è tanto maggiore quanto maggiore è la presenza degli investitori.

Capitolo 3

La successione di Fibonacci

Definizione 1 Una *successione* di elementi di un dato insieme A è un'applicazione dall'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali in A :

$$f : \mathbb{N} \rightarrow A.$$

L'elemento a_n della successione è quindi l'**immagine**

$$a_n = f(n)$$

del numero n secondo la funzione f . L'insieme A può essere, ad esempio, l'insieme dei numeri reali.

Definizione 2 Un punto $l \in \mathbb{R}$ è detto **limite** di una successione $\{a_n\}$ se per ogni intorno U di l esiste un numero naturale $N \in \mathbb{N}$ tale che:

$$a_n \in U, \quad \forall n > N$$

Considerando il limite di una successione numerica $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si possono suddividere le successioni in tre categorie:

- Una successione è detta *convergente* se:

$$\exists l \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$$

- Una successione è detta *divergente* se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$$

- Una successione è detta *irregolare* o *indeterminata* se:

$$\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Definizione 3 *La successione di Fibonacci, indicata con F_n , è una successione di numeri interi positivi in cui ciascun numero è la somma dei due precedenti e i primi due termini della successione sono per definizione:*

$$F_1 = 1;$$

$$F_2 = 1;$$

quindi

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

I primi termini della successione di Fibonacci sono: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, La successione prende il nome dal matematico pisano del XIII secolo Leonardo Fibonacci.

Proprietà principali

- Il rapporto $\frac{F_n}{F_{n-1}}$, per n tendente all'infinito, tende al numero algebrico irrazionale ϕ chiamato sezione aurea o numero di Fidia. In termini matematici:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \phi$$

dove $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\dots$

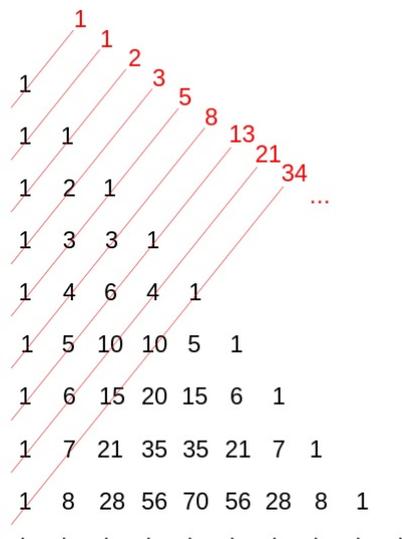
Naturalmente il rapporto tra un numero di Fibonacci e il suo successivo tende al reciproco della sezione aurea $\frac{1}{\phi} = 0,6180339887\dots$. Talora risulta comodo servirsi della successione bilatera (cioè una successione definita sugli interi invece che sui naturali) costituita da numeri interi aggiungendo ai precedenti i termini $F_{-n} := (-1)^{n+1}F_n$ per $n = 1, 2, \dots$. Nel nostro studio ritroveremo spesso le percentuali **23.6%**, ottenuta dividendo un numero per il terzo numero successivo, **38%**, ottenuta dividendo un numero per il secondo numero successivo, e **50%**, oltre alla già nota **61.8%**.

- Considerando il triangolo di Tartaglia a partire dalla prima linea rossa in alto, se si sommano i numeri attraversati da ogni linea, si ottiene la successione di Fibonacci.

La relazione con i coefficienti binomiali è:

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-k-1}{k} = \sum_{k=1}^n \binom{n-k}{k-1}$$

- Due numeri di Fibonacci consecutivi F_n, F_{n+1} non hanno fattori comuni, cioè sono coprimi.



Infatti, se per ipotesi fosse $F_n = ma$ e $F_{n+1} = mb$, in cui m è il fattore comune (diverso da 1), si avrebbe $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = m(a + b)$, cioè anche F_{n+2} avrebbe m come fattore comune e, proseguendo il ragionamento per i successivi F_{n+3}, F_{n+4}, \dots , si arriverebbe all'assurdo che tutti i numeri della successione hanno il fattore comune m .

- Se $m \mid k$ allora $F_m \mid F_k$ dove il simbolo $x \mid y$ significa che x è un divisore di y .
- Se p è un numero primo maggiore di 7 e $p \equiv 2 \pmod{5}$ oppure $p \equiv 4 \pmod{5}$ e $2p - 1$ è un numero primo (una condizione che ricorda quella sulla primalità di Sophie Germain ¹), allora $(2p - 1) \mid F_p$, quindi F_p è composto (ovvero non primo).

Se p è primo allora F_p^n non è un quadrato perfetto ad eccezione di $p = 5$, nel qual caso però è $F_5^n = 5^m$, con m non quadrato perfetto.

- Un'importante proprietà dei numeri di Fibonacci riguarda il loro massimo comun divisore. Infatti è soddisfatta l'identità

$$\text{MCD}(F_n, F_m) = F_{\text{MCD}(n,m)} \quad (\text{Teorema di Vorob'ev})$$

¹Un numero primo di Sophie Germain è un numero primo p tale che $2p + 1$ è anch'esso un numero primo. Il numero $2p + 1$ è invece chiamato primo sicuro. Prendono nome dalla matematica francese **Sophie Germain**, che all'inizio del XIX secolo li usò per dimostrare un caso particolare dell'ultimo teorema di Fermat.[6]

Da questo segue che F_n è divisibile per F_m se e solo se n è divisibile per m . Questa proprietà è importante perché ne segue che un numero di Fibonacci F_n può essere un numero primo solamente se n stesso è un numero primo, con l'unica eccezione di $F_4 = 3$ (l'unico numero di Fibonacci per cui potrebbe essere divisibile è $F_2 = 1$). Il viceversa tuttavia non è vero: F_{19} , ad esempio, è uguale a $4181 = 37 \cdot 113$.

Non è noto se i numeri primi che sono anche numeri di Fibonacci siano o meno infiniti.

Inoltre si può dimostrare che ogni numero primo divide almeno uno, e di conseguenza infiniti, numeri di Fibonacci.

Numeri complessi di Fibonacci

Definizione 4 *Un numero complesso di Fibonacci è un numero complesso la cui parte reale è un numero di Fibonacci.*

Ad esempio $z = 8 - i$ è un numero complesso di Fibonacci perché $\operatorname{Re}(z) = 8 = F_6$

Proprietà

Il rapporto di numeri complessi di Fibonacci con k dispari e $n > 0$ è tale che:

$$\frac{F_k - ni}{F_{k-1} - (n-1)i} = \frac{F_{k+n} + i(-1)^{n-1}}{F_{k+(n-1)}}$$

dove $F_{k+n} = \sum_{i=k+1}^{n-1} F_i$.

Per k pari e $n > 0$ la formula non vale per i numeri complessi ma solo per i numeri interi sostituendo 1 a i , ovvero

$$\frac{F_k - n}{F_{k-1} - (n-1)} = \frac{F_{k+n} + (-1)^{n-1}}{F_{k+(n-1)}}$$

dove $F_{k+n} = \sum_{i=k+1}^{n-1} F_i$.

In economia

Come vedremo nel capitolo 5, i numeri di Fibonacci sono utilizzati anche in economia nell'Analisi tecnica per le previsioni dell'andamento dei titoli in borsa, secondo la teoria delle onde di Elliott.

Studiando i grafici storici dei titoli, Ralph Nelson Elliott sviluppò un metodo basato su tredici conformazioni grafiche dette onde, simili per forma ma non necessariamente per dimensione.

A differenza di altre applicazioni grafiche come medie mobili, trendline, macd, rsi ecc. che si limitano ad indicare il livello di resistenza e di supporto e le angolature del trend, "Il principio delle onde di Elliott" è l'unico metodo in grado di individuare un movimento del mercato dall'inizio alla fine e quindi di presumere i futuri andamenti dei prezzi.

Capitolo 4

Frattali

4.1 Misura e dimensione

4.1.1 Alcuni aspetti base sulla teoria della misura

Di seguito si considererà lo spazio euclideo n -dimensionale \mathbb{R}^n .

Definizione 1 Una collezione non vuota S di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n è detta una σ -algebra se S è chiusa rispetto alla complementazione e alla unione numerabile, cioè

1. $E \in S \implies \mathbb{R}^n \setminus E \in S$
2. $E_1, E_2, \dots \in S \implies \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in S$.

Si dimostra che una σ -algebra è anche chiusa rispetto all'intersezione numerabile e rispetto alla differenza di insiemi e che \mathbb{R}^n e \emptyset sono in S .

Il limite inferiore e superiore di una successione di insiemi $\{E_j\}$ sono definiti come

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} E_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k} E_j \quad \limsup_{j \rightarrow \infty} E_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k} E_j.$$

Quindi $\liminf E_j$ è caratterizzato da tutti quei punti giacenti in tutti tranne un numero finito di E_j , e $\limsup E_j$ consiste di quei punti in infiniti insiemi E_j .

Se E_j sta nella σ -algebra S per ogni j allora $\liminf E_j$ e $\limsup E_j$ appartengono ad S .

Se $\liminf E_j = \limsup E_j$, scriviamo $\lim E_j$ per il valore comune; ciò accade sempre se $\{E_j\}$ è una successione crescente o decrescente di insiemi.

Sia C una qualunque collezione di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n .

Definizione 2 La σ -algebra **generata da** C , denotata con $S(C)$, è l'intersezione di tutte le σ -algre contenenti C .

Si dimostra che $S(C)$ è essa stessa una σ -algebra che può essere pensata come "la più piccola" σ -algebra contenente C .

Definizione 3 Una **misura** μ è una funzione definita su una σ -algebra S di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n e avente valori in $[0, +\infty]$ tale che:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$

per ogni successione di insiemi disgiunti $\{E_j\}$ in S .

Dal punto 2. della precedente definizione, segue che μ è una funzione crescente di insiemi, cioè se $E \subset E'$ e $E, E' \in S$, allora $\mu(E) \leq \mu(E')$.

Teorema 1 Sia μ una misura su una σ -algebra S di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n .

a) se $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ è una successione crescente di insiemi in S , allora

$$\mu(\lim_{j \rightarrow \infty} E_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(E_j)$$

b) se $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ è una successione decrescente di insiemi in S e $\mu(F_1) < \infty$, allora

$$\mu(\lim_{j \rightarrow \infty} F_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(F_j)$$

c) per qualsiasi successione di insiemi $\{F_j\}$ in S

$$\mu(\liminf_{j \rightarrow \infty} F_j) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \mu(F_j).$$

Si introducono ora le misure esterne, che sono analoghe alle misure appena definite, indebolite però dalla subaddittività¹.

Definizione 4 Una **misura esterna** ν su \mathbb{R}^n è una funzione definita su tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n avente valori in $[0, +\infty]$ tale che:

1. $\nu(\emptyset) = 0$

¹Si ricorda che una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice **subaddittiva**, o che gode dalla proprietà di **subaddittività**, se comunque si prendano x e y in A , si ha: $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

$$2. \nu(A) \leq \nu(A') \text{ se } A \subset A'$$

$$3. \nu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j)$$

per ogni famiglia di sottoinsiemi A_j di \mathbb{R}^n .

Le misure esterne sono utili poiché c'è sempre una σ -algebra di sottoinsiemi sulla quale si comportano come misure; per misure esterne opportunamente definite questa σ -algebra può essere molto grande.

Definizione 5 Un sottoinsieme E di \mathbb{R}^n è detto ν -**misurabile** o **misurabile rispetto alla misura esterna** ν se essa decompone ogni sottoinsieme di \mathbb{R}^n additivamente, cioè se

$$\nu(A) = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) \quad (4.1)$$

per ogni "insieme di prova" $A \subset \mathbb{R}^n$. In realtà, è sufficiente controllare che

$$\nu(A) \geq \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) \quad (4.2)$$

dato che la disuguaglianza opposta segue dal punto 3. della definizione precedente.

Teorema 2 Sia ν una misura esterna. La collezione \mathcal{M} degli insiemi ν -misurabili forma una σ -algebra, e la restrizione di ν ad \mathcal{M} è una misura.

Sia (\mathbb{R}^n, d) lo spazio metrico euclideo.

Definizione 5 Gli insiemi appartenenti alla σ -algebra generata dai sottoinsiemi chiusi di \mathbb{R}^n sono detti **insiemi Boreliani** dello spazio.

I boreliani includono gli aperti (come complementari dei chiusi), gli insiemi F_σ (unioni numerabili di chiusi) e gli insiemi G_δ (intersezioni numerabili di aperti).

Definizione 6 Una misura esterna ν su \mathbb{R}^n è detta **misura esterna metrica** se

$$\nu(E \cap F) = \nu(E) + \nu(F) \quad (4.3)$$

ogni volta che E ed F sono positivamente distanziati, cioè, ogni qualvolta $\delta(E, F) = \inf\{d(x, y) : x \in E, y \in F\} > 0$.

Se ν è una misura esterna metrica, allora la collezione degli insiemi ν -misurabili include i boreliani.

Teorema 3 Se ν è una misura esterna metrica su (\mathbb{R}^n, d) , allora tutti i sottoinsiemi boreliani di \mathbb{R}^n sono ν -misurabili.

4.1.2 Misura di Hausdorff

Definizione 7 Se U è un sottoinsieme non vuoto di \mathbb{R}^n , definiamo il **diametro** di U come $|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$.

Si pone inoltre $|\emptyset| = 0$. Sia $\{U_i\}$ una successione di insiemi. Se $E \subset \bigcup_i U_i$ e $0 \leq |U_i| \leq \delta$ per ogni i , diciamo che U_i è un δ -ricoprimento di E .

Definizione 8 Sia E un sottoinsieme di \mathbb{R}^n e sia s un numero non negativo. Per $\delta > 0$ definiamo

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s, \quad (4.4)$$

dove l'inf è calcolato su tutti i δ -ricoprimenti $\{U_i\}$ di E .

Lemma 1 \mathcal{H}_δ^s è una misura esterna su \mathbb{R}^n .

Lemma 2 \mathcal{H}_δ^s cresce al crescere di δ .

Per ottenere la misura esterna s -dimensionale di Hausdorff di E facciamo tendere δ a 0. Quindi

$$\mathcal{H}^s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(E)$$

Il limite esiste, ma potrebbe essere infinito, dal momento che \mathcal{H}_δ^s cresce al decrescere di δ .

Lemma 3 \mathcal{H}^s è una misura esterna metrica.

La restrizione di \mathcal{H}^s alla σ -algebra degli insiemi \mathcal{H}^s -misurabili, che per il teorema 3 include i boreliani, è detta **misura di Hausdorff** s -dimensionale. Si noti che un'equivalente definizione della misura di Hausdorff si ottiene se l'inf in (4.4) è preso sui δ -ricoprimenti di E con insiemi convessi dello stesso diametro. Similmente, talvolta è conveniente considerare δ -ricoprimenti di insiemi aperti o alternativamente chiusi. Sebbene si possa ottenere un diverso valore per \mathcal{H}_δ^s per $\delta > 0$, il valore del limite \mathcal{H}^s è lo stesso.

Un altro discorso vale se si vuole prendere l'inf su δ -ricoprimenti costituiti da palle: come dimostrato da Besicovitch ², la misura potrebbe in questo caso essere diversa.

Lemma 4 Per ogni insieme E , $\mathcal{H}^s(E)$ è non crescente al crescere di s da 0 a ∞ . Più precisamente, se $s < t$, allora $\mathcal{H}_\delta^s(E) \geq \delta^{s-t} \mathcal{H}_\delta^t(E)$

Lemma 5 Posto $s < t$, se $\mathcal{H}^t(E)$ è positiva o $+\infty$, allora $\mathcal{H}^s(E)$ è infinita.

²Abram Samoilovitch Besicovitch (1891-1970) è un matematico Russo che ha lavorato principalmente in Inghilterra. Qui si fa riferimento al suo teorema sui ricoprimenti [8].

4.1.3 Dimensione di Hausdorff

Se C è un cubo di lato 1 in \mathbb{R}^n , dividendo C in k^n cubetti di lato $\frac{1}{k}$ nella maniera ovvia, notiamo che se $\delta \leq k^{-1}n^{\frac{1}{2}}$, allora $\mathcal{H}_\delta^n(C) \leq k^n(k^{-1}n^{\frac{1}{2}})^n \leq n^{\frac{1}{2}n}$ in modo che $\mathcal{H}^n(C) < \infty$. Quindi se $s > n$, allora $\mathcal{H}^s(C) = 0$ e $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$, dal momento che \mathbb{R}^n si può esprimere come unione numerabile di tali cubi. Ne segue che $0 \leq \dim E \leq n$ per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$.

Come conseguenza del lemma 5 e di quanto sopra c'è un unico valore, $\dim E$, tale che $\mathcal{H}^s(E) = \infty$ se $0 \leq s \leq \dim E$, $\mathcal{H}^s(E) = 0$ se $\dim E < s < \infty$. Questo valore è detto **dimensione di Hausdorff** di E .

Un insieme \mathcal{H}^s -misurabile $E \subset \mathbb{R}^n$ per il quale $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ è detto un **s -insieme**; un 1-insieme è a volte detto un *insieme linearmente misurabile*.

Si possono dimostrare le seguenti proprietà della dimensione di Hausdorff

Monotonia: $E \subset F \implies \dim E \leq \dim F$

Stabilità: $\dim(E \cap F) = \max(\dim E, \dim F)$

Stabilità numerabile: $\dim(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sup_{1 \leq i \leq \infty} \dim F_i$

Invarianza geometrica: $\dim f(F) = \dim F$ se f è una trasformazione di \mathbb{R}^n come una traslazione, rotazione, similitudine o affinità

Insiemi numerabili: $\dim F = 0$ se F è finito o numerabile

Insiemi aperti: F è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n \implies \dim F = n$

Varietà differenziali: $\dim F = m$ se F è una varietà m -dimensionale.

Esistono diverse definizioni alternative di dimensioni, che volutamente non saranno menzionate nel documento.

4.2 Alcuni esempi di frattali e Autosimilarità

4.2.1 Curve di dimensione frazionaria

Il miglior modo per ottenere una funzione il cui grafico presenta una struttura frastagliata è di sommare una successione di funzioni che oscillano sempre più velocemente.

Si consideri ad esempio la funzione di Weierstrass, proposta per la prima

volta nel 1872 come esempio di funzione continua ma non differenziabile in alcun punto. Una forma della funzione è:

$$w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \cos(\alpha^n t) \quad (4.5)$$

con le condizioni:

$$\alpha > 1 \quad 0 < \beta < 1.$$

Si dimostra che la (4.5) possiede la proprietà di essere ovunque continua, essendo una serie uniformemente convergente di funzioni continue, ma non è derivabile in alcun punto se vale la condizione ulteriore:

$$\alpha\beta > 1.$$

Se chiamiamo $\alpha = b$ e $\beta = b^{D-2}$, la funzione di Weierstrass può anche essere riscritta nel seguente modo:

$$w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (b^{D-2})^n \cos(b^n t) \quad (4.6)$$

e le condizioni da imporre diventano

$$\begin{aligned} \alpha > 1 &\rightarrow b > 1 \\ 0 < \beta < 1 &\rightarrow D < 2 \\ \alpha\beta > 1 &\rightarrow D > 1. \end{aligned}$$

La (4.6) rappresenta la forma più nota della funzione di Weierstrass. Si congettura che la funzione abbia un grafico di dimensione D (sebbene una dimostrazione non sia ancora apparsa in letteratura, si ha notizia di una pubblicazione apparsa in Cina in cui se ne annuncia una prova).

La funzione di Weierstrass si rivela utile come punto di partenza per la costruzione di un prototipo di funzione frattale autosimile: essa infatti è la somma di cosinusi di periodo sempre più piccolo che generano una linea fatta di un'infinità di increspature infinitesime.

Per una computazione più semplice è conveniente sostituire la funzione \cos in (4.5) con funzioni periodiche lineari a tratti.

Sia g la funzione a "zig-zag" di periodo 4 definita su \mathbb{R} da

$$\left\{ \begin{array}{ll} x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 \leq x < 3 \\ x - 4 & \text{se } 3 \leq x < 4 \end{array} \right.$$

per $0 \leq x < 4$ e che si ripete periodicamente con periodo 4 su tutto \mathbb{R} . Si può allora dimostrare che il grafico della funzione

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)i} g(\lambda^i x)$$

per $x \in [0, 1]$, dove $1 < s < 2$ e $\lambda > 1$, ha dimensione s .

4.2.2 Gli insiemi autosimili o autosimilari

Molti dei classici insiemi frattali sono *autosimili*. Da un punto di vista intuitivo ciò significa che sono formati da parti geometricamente simili all'intera figura, però in scala ridotta. Figure che presentano caratteristiche di autosimilarità sono presenti già nell'arte antica e, come fa notare Mandelbrot, le possiamo immaginare osservando la natura [10].

Dal punto di vista matematico sono noti insiemi autosimili fin dalla fine del diciannovesimo e dall'inizio del ventesimo secolo, tuttavia solo verso la fine del ventesimo secolo ci sono stati tentativi di porre la loro teoria su una base sistematica.

Definizione 9 Una funzione $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è detta una **contrazione** se esiste un $c < 1$ per cui

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq c|x - y| \text{ per ogni } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Qualsiasi contrazione è una funzione continua. Il minimo valore di c per il quale è soddisfatta questa disuguaglianza per ogni x e y è detto **rapporto di contrazione**. Una contrazione che trasforma ogni sottoinsieme di \mathbb{R}^n in un insieme geometricamente simile è detta una **similitudine**. Quindi una similitudine è composizione di una dilatazione, una rotazione, una traslazione o una riflessione; il rapporto di contrazione è quindi semplicemente il fattore di scala della similitudine.

Definizione 10 Diciamo che un insieme $E \in \mathbb{R}^n$ è invariante per un insieme di contrazioni $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ se $E = \bigcup_{j=1}^m \psi_j(E)$.

Se in più le contrazioni sono similitudini e per qualche s abbiamo $\mathcal{H}^s(E) > 0$ ma $\mathcal{H}^s(\psi_i(E) \cap \psi_j(E)) = 0$ per $i \neq j$, allora E è autosimilare (questa condizione sulla misura assicura che le caratteristiche di autosimilarità di E non si perdano tramite sovrapposizioni).

Se ψ_j per $j = 1, \dots, m$ è un insieme di contrazioni, ψ denota la trasformazione di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n definita da

$$\psi(F) = \bigcup_{j=1}^m \psi_j(F).$$

Denotiamo le iterate di ψ nel seguente modo: $\psi^0(F) = F$ e $\psi^{k+1}(F) = \psi(\psi^k(F))$ per $k \geq 0$.

Definizione 11 Sia \mathbb{R}^n uno spazio metrico completo con la metrica d . Per ogni sottoinsieme compatto³ A di \mathbb{R}^n e $\epsilon > 0$, definiamo l' ϵ -collare di A come

$$A_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, y) \leq \epsilon \text{ per qualche } y \in A\}.$$

Definizione 6 Dati due sottoinsiemi compatti A e B di \mathbb{R}^n , la **distanza di Hausdorff** è

$$d_h(A, B) = \inf\{\epsilon : A \subset B_\epsilon \text{ e } B \subset A_\epsilon\}.$$

Si può dimostrare che lo spazio di tutti i sottoinsiemi compatti non vuoti di \mathbb{R}^n con la distanza di Hausdorff è uno spazio metrico completo.

Teorema 4 Dato un insieme di contrazioni $\{\psi_j\}$ per $j = 1, \dots, m$ su \mathbb{R}^n con rapporti di contrazione $r_j < 1$, esiste un unico insieme compatto non vuoto E tale che

$$E = \psi(E) = \bigcup_{j=1}^m \psi_j(E).$$

In più, se F è un qualsiasi sottoinsieme compatto non vuoto di \mathbb{R}^n , le iterate $\psi_k(F)$ convergono ad E nella metrica di Hausdorff per $k \rightarrow \infty$.

Diciamo che è soddisfatta la condizione di insieme aperto per le contrazioni $\{\psi_j\}$ per $j = 1, \dots, m$ se esiste un insieme aperto limitato V tale che

$$\psi(V) = \bigcup_{j=1}^m \psi_j(V) \subset V$$

con quest'unione disgiunta. Il seguente teorema è utile per il calcolo della dimensione di Hausdorff.

³Uno spazio metrico si dice compatto se ogni suo ricoprimento aperto contiene un sottoricoprimento finito

Teorema 5 *Supponiamo che valga la condizione di insieme aperto per le similitudini ψ_j con rapporti di contrazione r_j ($1 \leq j \leq m$). Allora l'insieme invariante compatto associato E è un s -insieme autosimilare, dove s è determinato da*

$$\sum_{j=1}^m r_j^s = 1. \quad (4.7)$$

4.2.3 Esempi di insiemi autosimili

a) *Insieme di Cantor*

Partiamo dall'intervallo $F = [0, 1]$. Eliminiamo l'intervallo aperto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, cioè rimuoviamo il terzo centrale da $[0, 1]$. Ciò lascia 2 intervalli: $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$, ciascuno di lunghezza $\frac{1}{3}$. Sia F_1 la loro unione. In questo modo si è completato il primo passo della costruzione. Adesso ripetiamo il procedimento; rimuoviamo i terzi centrali degli intervalli $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$, il che porta a 4 intervalli di lunghezza $\frac{1}{9}$. Chiamiamo F_2 l'unione di questi 4 intervalli. Continuiamo in questo modo. Al passo n -esimo si hanno esattamente 2^n intervalli chiusi di lunghezza $\frac{1}{3^n}$. L'**insieme di Cantor** è definito da $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$.

Ai fini della sua rappresentazione grafica, preferiamo non disegnare i singoli punti, ma linee verticali passanti per i punti dell'insieme al fine di vedere meglio com'è fatto l'insieme. Un punto x appartiene all'insieme

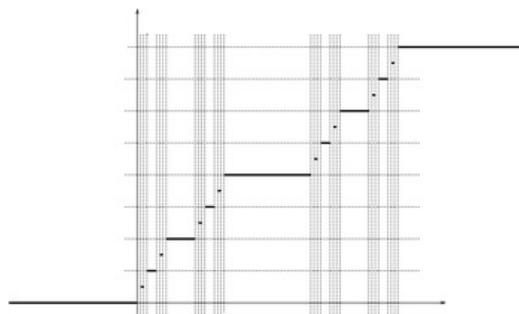


Figura 4.1: Insieme di Cantor per linee

di Cantor se siamo certi che non verrà rimosso indipendentemente da quante volte iteriamo il processo. Ovviamente $0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{27}, \frac{2}{27}$ sono esempi di tali punti perché sono gli estremi degli intervalli che vengono creati nei passi di costruzione. Si può immaginare che tutti i punti dell'insieme di Cantor siano di questo tipo, ma questo non è vero: in effetti, esso non è numerabile.

L'insieme di Cantor è autosimile con rapporto di contrazione $\frac{1}{3}$. Infatti

è invariante rispetto alle similitudini dell'asse reale

$$\psi_1(x) = \frac{x}{3}, \quad \psi_2(x) = \frac{x+2}{3}.$$

Verifichiamo che vale la condizione di insieme aperto per ψ_1 e ψ_2 , prendendo come insieme aperto $(0, 1)$.

$$\psi_1((0, 1)) \cup \psi_2((0, 1)) = \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right) \subset (0, 1).$$

Usiamo il teorema 5 per calcolare la dimensione di Hausdorff dell'insieme di Cantor. Qui $r_j = \frac{1}{3}$ per $j = 1, 2$. La 4.7 diventa

$$2 \cdot \frac{1}{3^s} = 1,$$

cioè $s = \log_3 2 = \frac{\ln 2}{\ln 3} \simeq 0,631$

b) *Il triangolo e il tappeto di Sierpinski*

La costruzione del triangolo di Sierpinski è la seguente: iniziamo con un triangolo F nel piano, prendiamo i 3 punti medi dei suoi lati che insieme ai 3 vertici del triangolo definiscono 4 triangoli congruenti di cui togliamo quello centrale. Ciò completa un passo della costruzione. Dopo il primo passo abbiamo 3 triangoli congruenti i cui lati sono la metà dei lati del triangolo di partenza e si toccano in tre punti. Poniamo F_1 la loro unione. Ripetiamo lo stesso procedimento con i 3 triangoli rimasti. Il triangolo di Sierpinski è definito da $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$.

Usiamo il teorema 5 per calcolarne la dimensione di Hausdorff. Qui $r_j = \frac{1}{2}$ per $j = 1, 2, 3$. La 4.7 diventa

$$3 \cdot \frac{1}{2^s} = 1,$$

cioè $s = \log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2} \simeq 1,585$.

Si può fare un'analogia costruzione nello spazio tridimensionale a partire da un tetraedro. Il frattale corrispondente viene chiamato *tetrix*. Usiamo sempre il teorema 5 per calcolarne la dimensione di Hausdorff. Qui $r_j = \frac{1}{2}$ per $j = 1, \dots, 4$. La 4.7 diventa

$$4 \cdot \frac{1}{2^s} = 1,$$

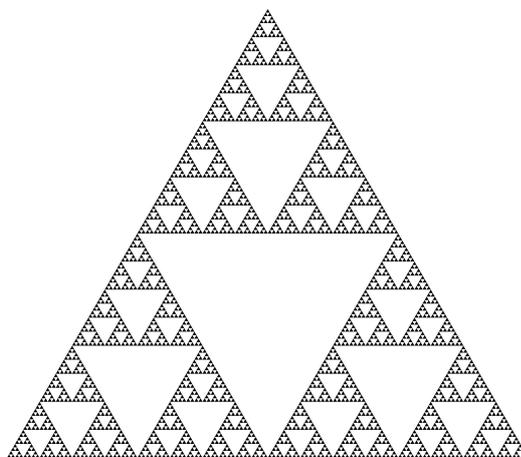


Figura 4.2: Triangolo di Sierpinski

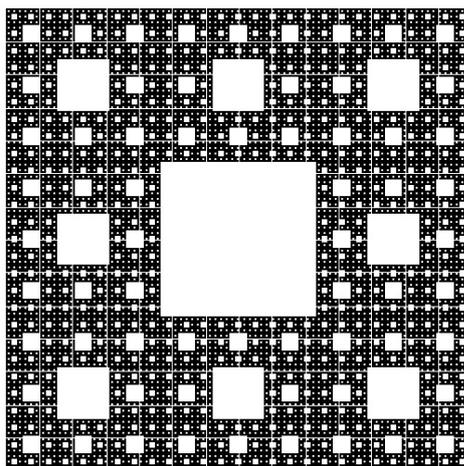


Figura 4.3: Tappeto di Sierpinski

cioè $s = \log_2 4 = 2$.

Notiamo che la dimensione di Hausdorff è, in questo caso, un numero intero. La costruzione del tappeto di Sierpinski è la seguente: iniziamo con un quadrato nel piano. Suddividiamolo in 9 piccoli quadrati congruenti di cui togliamo quello centrale. Poniamo F_1 l'unione degli 8 quadrati rimasti e ripetiamo il procedimento. Il tappeto di Sierpinski è definito da $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$.

Usiamo il teorema 5 per calcolarne la dimensione di Hausdorff. Qui

$r_j = \frac{1}{3}$ per $j = 1, \dots, 8$. La 4.7 diventa

$$8 \cdot \frac{1}{3^s} = 1,$$

cioè $s = \log_3 8 = \frac{\ln 8}{\ln 3} \simeq 1,893$.

c) *La curva di Koch*

La costruzione della curva di Koch è la seguente: partiamo da un segmento (che ad esempio può essere identificato con l'intervallo $[0, 1]$). Dividiamolo in 3 parti uguali e sostituiamo il terzo centrale con 2 lati di un triangolo equilatero di lato il segmento sostituito (il lato mancante è la base). Ciò completa un passo della costruzione.

Poniamo F_1 l'unione dei 4 segmenti e ripetiamo il processo con ciascuno di essi. La curva di Koch è definita da $E = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k$, dove il limite è inteso nella metrica di Hausdorff. Koch introdusse questa

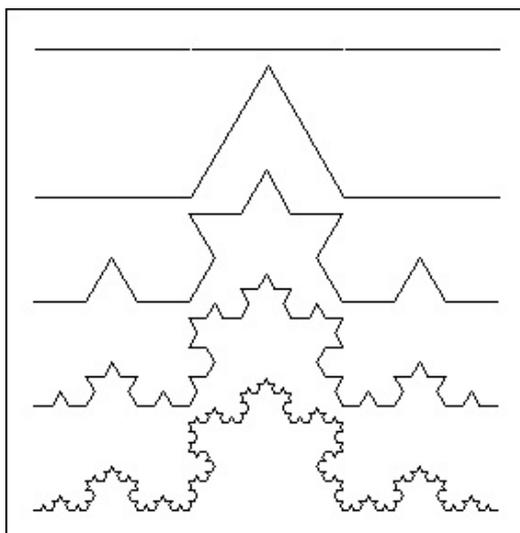


Figura 4.4: La curva di Koch

curva per dare un altro esempio della scoperta fatta dal matematico tedesco Weierstrass (funzione 4.5). Si ricordi infatti che la curva non è differenziabile in alcun punto, cioè non ammette tangente in nessuno dei suoi punti. Se una curva ha uno spigolo, non c'è modo di tracciare un'unica tangente. La curva di Koch è un esempio di curva che in un certo senso è composta da spigoli dappertutto, quindi non c'è modo di definire una tangente in alcuno dei suoi punti.

Mettendo insieme 3 copie della curva di Koch opportunamente ruotate otteniamo una figura che per ovvie ragioni è detta curva a fiocco di neve o isola di Koch.

La curva di Koch è invariante rispetto alle trasformazioni

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{1}{3}(x, y), \\ \psi_2 &= \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - \frac{y\sqrt{3}}{2} + 1, \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2}\right), \\ \psi_3 &= \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2} + 2, -\frac{(x-1)\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2}\right), \\ \psi_4 &= \frac{1}{3}(x+2; y).\end{aligned}$$

Il triangolo equilatero aperto di base $(0, 1)$, rivolto verso l'alto (cioè in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$) viene trasformato dalle ψ_1, \dots, ψ_4 in 4 triangoli equilateri aperti disgiunti contenuti nel triangolo di partenza (quindi vale la condizione di insieme aperto).

Usiamo il teorema 5 per calcolarne la dimensione di Hausdorff. Qui $r_j = \frac{1}{3}$ per $j = 1, 2, 3, 4$. La 4.7 diventa

$$4 \cdot \frac{1}{3^s} = 1,$$

cioè $s = \log_3 4 = \frac{\ln 4}{\ln 3} \simeq 1,262$.

Può essere interessante calcolarne la lunghezza, e da essa dedurne la lunghezza della "costa" dell'isola di Koch. Denotiamo con K la lunghezza del segmento di partenza; allora la lunghezza della curva al k -esimo passo sarà:

$$L_k = 4^k \cdot K \cdot \frac{1}{3^k}$$

e quindi la lunghezza della curva di Koch risulterà:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L_k = \lim_{k \rightarrow \infty} K \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^k = \infty.$$

Ne segue che anche la "costa" dell'isola di Koch avrà lunghezza infinita, mentre la sua area sarà finita, siccome è contenuta in una regione limitata del piano.

Capitolo 5

La teoria delle onde di Elliott

Ralph Nelson Elliott fa riferimento a tre importanti aspetti dei movimenti di prezzo nella sua teoria: "pattern" (o grafico), "ratio" (o rapporto) e "time" (o tempo). Il "pattern" (o grafico) si riferisce alle onde o formazioni, mentre il "ratio" (o rapporto), cioè la relazione tra numeri, si riferisce in particolare alla serie di Fibonacci, che è molto utile per misurare le onde. Per usare la teoria nel trading di tutti i giorni: il trader cerca di determinare l'onda principale (o Superciclo), quindi acquista sperando di guadagnare e in seguito vende o accorcia la posizione; queste scelte vengono fatte mentre il "pattern" (o grafico) sta per subire un'inversione di tendenza imminente.

Le 5 onde Nella sua forma più elementare, la teoria delle onde di Elliott dice che tutta l'azione del mercato segue un ritmo ripetitivo di cinque onde nelle direzioni della tendenza (o trend) principale, seguita da 3 onde correttive (mossa 5-3).

Le onde rialziste sono definite 1-2-3-4-5 e le onde ribassiste sono definite a-b-c. Nelle fasi rialziste, le onde 1, 3 e 5 sono "onde d'impulso" e si muovono nella direzione della tendenza (o trend), mentre le onde 2 e 4 sono chiamate "onde correttive". Dopo che l'avanzamento delle cinque onde rialziste è completo, una correzione delle tre onde correttive chiamate a-b-c ha inizio. Nella fase di correzione delle onde, le onde "a" e "c" si muovono in direzione ribassista (o di ritiro), mentre l'onda "b" si muove in direzione opposta. Nell'immagine 5.1 è descritta una tendenza (o trend) in salita: per di più le onde rialziste si muovono verso l'alto. In una tendenza (o trend) in discesa, le onde verso il basso verranno indicate nella forma 1-2-3-4-5, le onde verso l'alto come a-b-c.

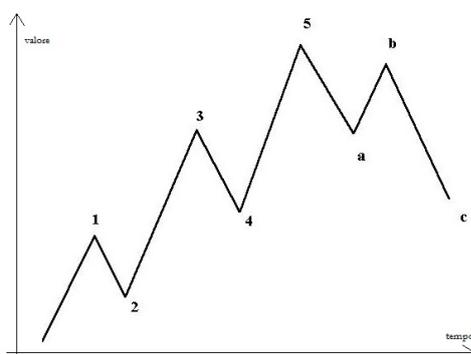


Figura 5.1: Rappresentazione semplice delle onde 5-3 al rialzo

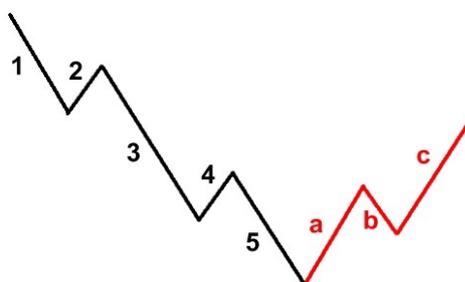


Figura 5.2: Rappresentazione semplice delle onde 5-3 al ribasso

Cicli di onde Dopo che la fase ribassista delle tre onde è completa, una nuova fase rialzista di cinque onde comincia, e così via, finché si verifica un'inversione. È possibile vedere che ogni fase rialzista di cinque onde può essere identificata come singola onda rialzista; analogamente, se osservato da una prospettiva più larga. E viceversa, ogni onda può essere suddivisa in onde più piccole.

Tipi di cicli La teoria delle onde di Elliott classifica le onde in base alla durata del ciclo, andando da un Grande Superciclo (o Grand Supercycle), che dura per decenni, ad un grado di Subminuette, che copre non più di qualche ora. Tuttavia il ciclo delle 8 onde rimane costante: un ciclo borsistico primario è scomponibile in tanti sottocicli che mantengono le stesse proprietà del ciclo di partenza.

Come possiamo notare un impulso (1), (3), (5), è a sua volta "generato" da altri impulsi e correzioni più piccole. In altre parole Elliott scoprì l'*auto-similarità* dei mercati. Il ciclo completo delle otto onde si inserisce in un

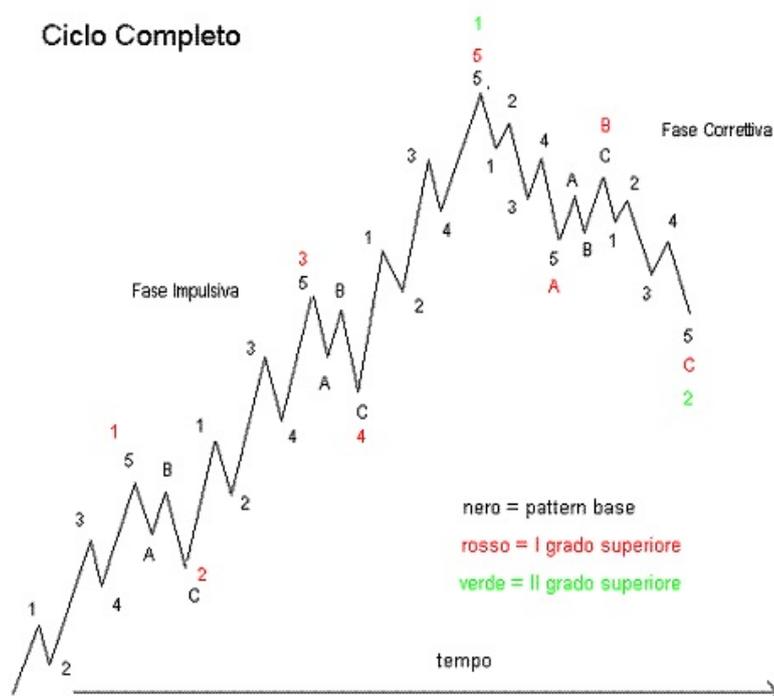


Figura 5.3: Rappresentazione ciclica delle onde 5-3

contesto (pattern) più grande che a sua volta va inserito in un contesto ancora più grande. Per questo spesso si ritiene Elliott il primo studioso di finanza frattale, anche se questa, come materia, nascerà solo più tardi (seconda metà del '900 [14]).

Ciclo	Ondate Impulsive	Ondate Correttive	Ciclo Completo
I grado (base)	5	3	8
II grado	21	13	34
III grado	89	55	144

Analogie con la serie di Fibonacci Il Wave Principle, cioè l'intera teoria delle onde di Elliott, non fornisce indicazioni in termini di tempo. Spesso relazioni temporali basate sulla serie di Fibonacci sembrano adattarsi con buona accuratezza alla durata delle onde. I target temporali di Fibonacci

sono ottenuti contando da significativi top o bottom 13, 21, 34, 55, 89, 144 e 233 giorni (oppure mesi od anni, se si analizzano cicli di grado superiore). Essi spesso servono ad indicare possibili rovesciamenti di trend, specialmente se coincidono con obiettivi di prezzo e col conto delle onde.

5.1 Caratteristiche delle diverse onde

Nell'introdurre la teoria di Elliott si afferma che un pregio rispetto alla precedente teoria di Dow è certamente un più specifico risvolto **previsionale**. Infatti la semplice conoscenza del ciclo di cinque onde comporta la possibilità di individuare il probabile sviluppo futuro di un mercato, posto che si sia in grado di localizzare un punto sicuro all'interno della successione di onde.

Proprietà delle onde

Onda 1 è la meno significativa; viene generalmente confusa con un forte rimbalzo del precedente mercato ribassista;

Onda 3 è statisticamente l'onda più forte, sia nel senso di durata temporale che di guadagno percentuale; per questo sono solitamente ben definite le cinque sub-onde di dimensione minore al suo interno. La ragione del fenomeno sta nella rottura del massimo generato dall'onda 1;

Onda 4 è solitamente una correzione complessa e duratura, che provoca frequentemente falsi segnali tecnici. La ragione di questa importante correzione sta negli eccessi rialzisti dell'onda 3;

Onda 5 può essere il movimento d'impulso più forte; d'altra parte, lo stesso Elliott notava come, statisticamente, l'onda 5 si avvicinasse per tempi e dimensioni all'onda 1;

Onda A è molto veloce e in genere ha la stessa ampiezza dell'onda 1. Accade frequentemente che venga interpretata come correzione in un mercato fortemente rialzista;

Onda B tendenzialmente riesce a ripercorrere buona parte della discesa dell'onda A. Va ricordato che l'onda B si sviluppa esclusivamente in tre onde, essendo un'onda di correzione.

Onda C è spesso l'onda più complessa da modellizzare; infatti si può manifestare come normale correzione.

Quindi, riassumendo, le onde 1,3,5 sono definite **impulso** mentre la 2 e la 4 **movimenti di correzione**. La sequenza a,b,c corregge l'intera evoluzione di cinque onde.

Tutti i movimenti possono essere suddivisi in onde di grado superiore. I movimenti nel senso del trend principale si suddividono in cinque onde mentre le onde di correzione possono essere scomposte in tre andamenti di grado inferiore.

- Le onde 1,3 e 5 sono le onde impulsive (Impulsive Waves);
- Le onde 2 e 4 sono le onde correttive (Corrective Waves) dell'onda 1 e dell'onda 3;
- La sequenza A,B e C rappresenta la correzione dell'intero movimento.

Individuazione delle onde Le regole operative fondamentali per l'individuazione delle onde sono:

1. L'onda 4 ha come limite inferiore il massimo della 1;

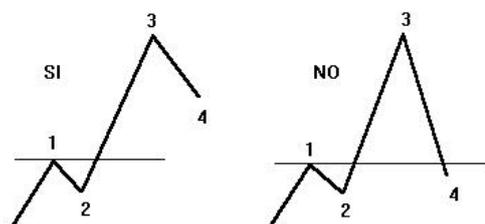


Figura 5.4: Individuazione onda 4

2. L'onda 3 è spesso la più ampia, ma in ogni caso non è mai la minore dei tre impulsi. Solitamente l'onda 3 è la più lunga del modello di Elliott; se l'onda 1 è più grande dell'onda 3, l'onda 5 non deve superare la lunghezza dell'onda 3.
3. Due delle onde impulso tendono ad essere uguali, *oppure ad avere un rapporto aureo* (0.618)
4. L'onda 5 è pari a 0.618 la distanza tra il minimo dell'impulso 1 e il massimo del 3;
5. L'onda 2 non può correggere oltre l'origine dell'onda 1.

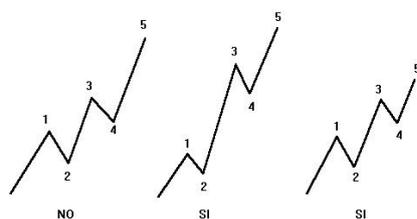


Figura 5.5: Individuazione onda 3

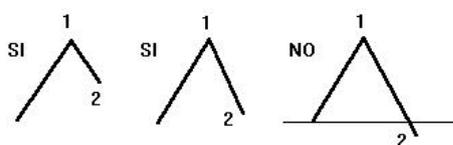


Figura 5.6: Individuazione onda 2

6. L'onda C è normalmente 1.618 volte la A e spesso termina 61.8% di A al di sotto di quest'ultima.

Va peraltro evidenziato che la somma delle onde di rialzo in un ciclo completo impulso-correzione è esattamente uguale alla somma delle onde di ribasso: l'onda 1, 3, 5, b al rialzo e l'onda 2,4,a,c al ribasso. La differenza sostanziale tra un'onda primaria rialzista ed una ribassista è data dalla maggiore estensione delle onde d'impulso in un senso o nell'altro.

Onda A Nella sequenza correttiva A,B,C, l'onda A occupa la prima posizione e può contenere, al suo interno, tre o cinque onde. Si sviluppa nella direzione opposta a quella del trend principale. Non è possibile indicare delle percentuali fisse di retracement. Il movimento termina tra l'onda 3 e 4.

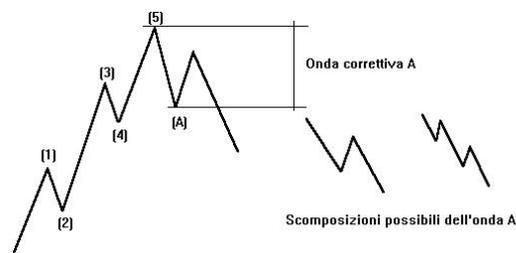


Figura 5.7: Onda A

Onda B L'onda B si sviluppa nella direzione opposta all'onda A correggendola in misura estremamente variabile; è la seconda fase della formazione correttiva A,B,C e deve presentare al suo interno un pattern a tre onde. Un'onda B si considera completa quando i prezzi completano il movimento C e poi ritornare oltre i livelli di massimi o minimi di A.

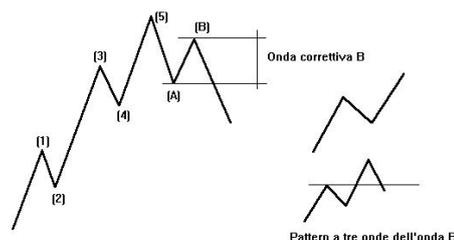


Figura 5.8: Onda B

Onda C L'onda C chiude la formazione correttiva A,B,C, è solitamente composta da un movimento a cinque onde con la sola eccezione nelle formazioni correttive triangolari nelle quali l'onda C è composta da tre onde o nelle formazioni di correzione complesse. L'onda C inizia nel punto finale dell'onda B e si sviluppa nella stessa direzione dell'onda A. L'onda C ha la stessa ampiezza dell'onda A o ad un multiplo della serie di Fibonacci per A.

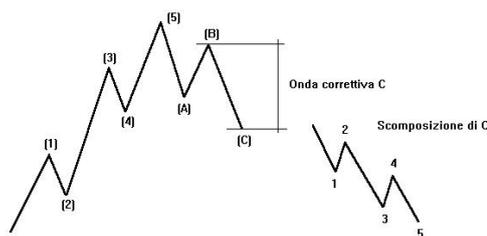


Figura 5.9: Onda C

In genere l'onda C porta i prezzi oltre i livelli massimi o minimi segnati dall'onda A.

Nella figura 5.11 sono rappresentati i rapporti delle onde impulsive.

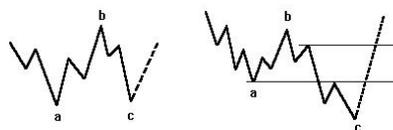


Figura 5.10: Onda C-livelli

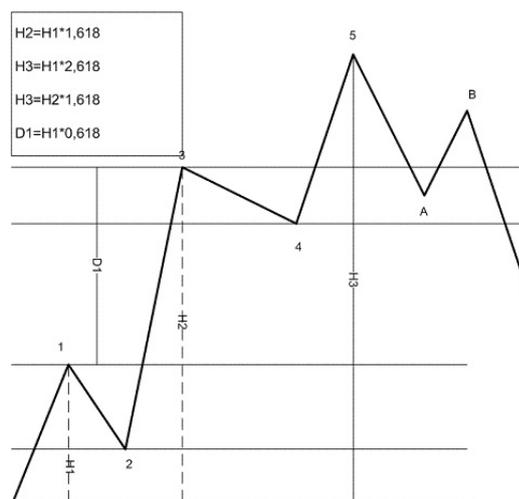


Figura 5.11:

5.2 L'analisi frattale

Benoit Mandelbrot scoprì, come già introdotto nel capitolo precedente, che molte forme naturali che si assumevano caotiche (nuvole, coste, montagne) non sono tali ma mostrano una forma relazionale che gli scienziati non avevano considerato. Mandelbrot ha ideato un nuovo modo di descrivere e calcolare forme irregolari e frammentate, facendo emergere una nuova geometria che è quella tipica della natura. Si è osservato un nuovo tipo di simmetria, che va da modelli di scala minima a modelli di scala sempre più ampia. Guardando le stesse forme al microscopio, le irregolarità non si smussano ma piuttosto tendono a sembrare irregolari come prima.

Similarmente, Elliott riconobbe che i grandi movimenti di mercato non sono differenti nella loro forma base dalle reazioni di breve periodo. L'unica differenza è che questi, essendo di scala maggiore, occorrono meno di frequente in termini assoluti (non in termini relativi). I pattern Elliottiani non solo mostrano discontinuità (es. dimensione e frequenza dei rovesciamenti del trend) simili a quelli dei modelli più ampi, ma formano repliche componenti di questi. L'intera struttura è basata su di una forma semplice (onde 5-3).

Elliott non solo spiegò che il progresso del mercato era di natura frattale, ma ne trovò e ne descrisse i modelli componenti, catalogando **13 modelli** semplici che si combinano per comporre il comportamento del mercato. Una combinazione di questi modelli in piccola scala crea un altro modello tipico in scala più ampia e così via. Più il tempo si espande, maggiore diviene il grado del trend, implicando un'espansione geometrica nella dimensione di avanzamenti e ritracciamenti, che forma il progresso dell'umanità. Questo processo è poi governato dalla serie di Fibonacci.

La conclusione finale di Elliott è che il progresso dell'umanità nella storia, generato dai riflessi dei sentimenti sociali, segue un grande disegno frattale governato dal quoziente di Fibonacci, lo stesso quoziente che governa vari modelli di crescita ed espansione riscontrabili nell'intero universo.

5.2.1 Un esempio reale

Vediamo ora l'analisi del future di Unipol nei primi mesi del 2015. Nell'immagine 5.12 sono evidenziate le 8 onde di Elliott, con un'ulteriore immagine di dettaglio che mostra l'auto-similarità delle onde.

L'onda 1 comincia il 9 ottobre 2014, a seguito di un profondo calo del prezzo, che raggiunge i 3.4260 punti. Inizia infatti un ciclo rialzista, che termina il 31 ottobre alla quota di 3.8500. La prima correzione, individuata dall'onda 2, dura fino al 12 novembre, raggiungendo i 3.4360.

Per comporre la terza onda, quella di maggiore importanza, si moltiplica l'ampiezza H_1 per due volte il numero aureo 1.618, ottenendo, al netto di approssimazioni, il valore di H_2 , ovvero 1.3. La correzione successiva, quella relativa all'onda 4, inizia il 3 febbraio 2015 e termina il 17 febbraio dello stesso anno, raggiunge i 4.200 punti. L'ultima onda impulsiva, la 5, termina il 10 aprile e raggiunge il livello di 5.3100 punti. Il valore di H_3 è infatti $H_3 = H_2 \cdot 1.618 = 2.01$.

Inizia poi la fase delle onde ribassiste A-B-C, che termina il 7 luglio con il valore di 4.1440.

Alcuni risultati importanti che si possono osservare dall'andamento di questi titoli:

$$H_1 = 3.8500 - 3.4260 = 0.424;$$

$$H_2 = H_1 \cdot 2 \cdot 1.618 = 1.3;$$

Se si indica con D_1 il valore dell'incremento sull'onda 5, si ha

$$\frac{H_1}{D_1} = 38\%; \quad \text{dove } D_1 = 5.3100 - 4.2000 = 1.11$$

Si noti inoltre che $D_1 = H_1 \cdot 2.618 = 1.11$.

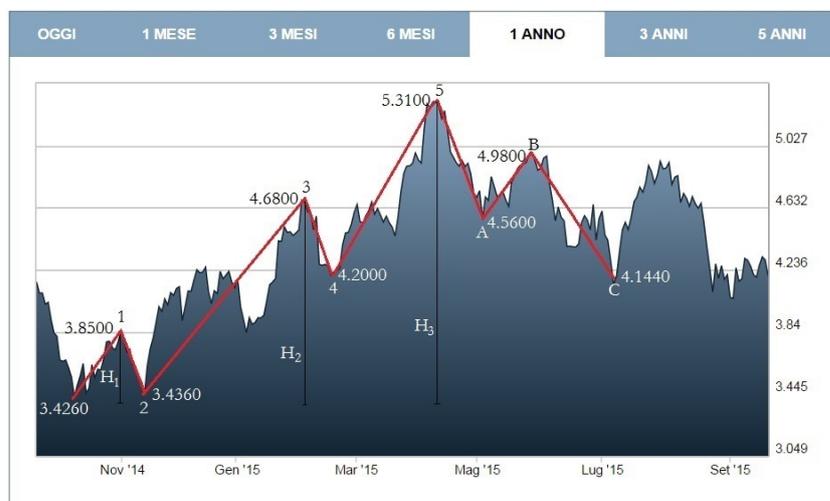


Figura 5.12: Andamento future Unipol, 2015. Fonte: <http://www.borsaitaliana.it/>

Nell'immagine 5.13 si ha un dettaglio del periodo 7 gennaio-17 febbraio, all'interno delle onde 3 e 4. Anche qui si possono notare le 8 onde di Elliott, con relativi valori.



Figura 5.13: Dettaglio andamento future Unipol, 2015. Fonte: <http://www.borsaitaliana.it/>

In conclusione, come è possibile apprendere dai grafici presentati in quest'ultima sezione, l'analisi ciclica adottata da Elliott è molto utile per

l'individuazione di cicli rialzisti o ribassisti che figurano nelle quotazioni dei titoli scambiati in borsa: questa ciclicità è rilevabile su orizzonti temporali differenti, si pensi ai time frame di diversi mesi con grafici su base settimanale o mensile dove la ciclicità è quantificabile nel medio o lungo periodo, oppure anche nel brevissimo; oppure si pensi a grafici giornalieri riferiti ad un semestre o trimestre, dai quali si possono perseguire strategie di breve periodo per cogliere spunti profittevoli sui mercati.

5.3 Conclusione

Per quanto detto, le ciclicità delle onde di Elliott, pur rilevabili su periodi diversi di tempo dal confronto con grafici riferiti allo stesso titolo ma studiato su scale temporali diverse, dimostrano che queste sequenze dispongono del requisito della frattalità, della caratteristica della dipendenza di lungo termine e della auto-somiglianza e autoaffinità, tutti elementi già descritti nelle precedenti sezioni.

Considerazioni finali La teoria di Elliott non possiede il carattere di *assolutezza* proprio delle leggi matematiche. Un suo corretto uso, oltre a quello operativo, è stabilire aree di inversione e quindi aiutare l'analista ad avere un quadro di riferimento, sia di breve che di lungo periodo, sempre aggiornato, nell'ambito del quale prendere le proprie decisioni.

In particolare, rispetto agli altri strumenti, la teoria di Elliott consente di anticipare il trend ed operare ai massimi e ai minimi presunti e non quando il trend è già in atto.

Probabilmente il vero problema di questa teoria è l'interpretazione delle diverse onde, ovvero stabilire quando un'onda finisce e un'altra inizia. L'intero concetto della teoria di Elliott si basa sul contare le onde ma è tuttora impossibile definire cosa sia un'onda. L'analista è quindi obbligato a usare giudizi molto soggettivi per etichettare un'onda e identificare la scala temporale a cui le onde si adattano.

La teoria è così flessibile che dagli stessi dati di prezzo è possibile raggiungere diversi risultati, che portano gli analisti che la seguono ad essere in continuo conflitto.

Inoltre, più si va indietro nel tempo, maggiore è il numero di conti possibili. In molti ambienti più informazioni significano più chiarezza, nella teoria di Elliott, invece, avviene il contrario.

Per quanto riguarda le distanze temporali di Fibonacci, sebbene questi periodi ricorrano frequentemente, è estremamente difficile usare questo principio per delle previsioni. La teoria di Elliott è quindi uno strumento molto soggettivo, che può essere molto pericoloso: questa teoria va vista come **risposta parziale** al puzzle delle previsioni.

Bibliografia

- [1] Biografia Elliott: http://www.traderpedia.it/wiki/index.php/Ralph_Nelson_Elliott
- [2] Biografia Elliott: <http://www.elliottwave.it/>
- [3] Successione di Fibonacci: https://it.wikipedia.org/wiki/Successione_di_Fibonacci
- [4] Successione di Fibonacci: Analisi matematica, volume 1. Carlo D. Pagani, Sandro Salsa. Zanichelli (1 gennaio 1990).
- [5] Successione di Fibonacci: Corso di Analisi Matematica, Università di Bari "Successioni e loro limiti", 2014.
- [6] Successione di Fibonacci: http://crema.di.unimi.it/~citrini/MD/progetto_primi/curiosita/sophie_germain/sophie_germain.html
- [7] Frattali: Tesi di Laurea "GLI INSIEMI FRATTALI: IL CONCETTO DI DIMENSIONE, L'AUTOSIMILARITÀ, GLI ALGORITMI" di Lorenzo Riccardo Scichilone, 2003-2004.
- [8] Frattali: Besicovitch covering theorem https://en.wikipedia.org/wiki/Besicovitch_covering_theorem
- [9] Frattali: "Introduzione ai frattali in fisica", Sergio Peppino Ratti. Springer Science & Business Media, 06 luglio 2011.
- [10] Frattali: The fractal geometry of nature, Benoit B. Mandelbrot. W. H. Freeman and Company; First Edition (1982)
- [11] Le onde di Elliott: <http://www.markets.com/it/education/technical-analysis/fibonacci-elliott-wave.html>
- [12] Le onde di Elliott:<http://www.traderpedia.it/wiki/index.php/>

- [13] Le onde di Elliott: Tesi Di Laurea "La finanza frattale applicata ai mercati finanziari" http://www.performancetrading.it/Documents/IT0221/IT022130-Elliott_Theory_Un_applicazione_di_finanza_frattale.html di Pierpaolo Cassese
- [14] Le onde di Elliott: LA FINANZA FRATTALE APPLICATA AI MERCATI FINANZIARI, Pierpaolo Pio Cassese, Capitolo 2 Fractal Theory. Pisa 2010.
- [15] Le onde di Elliott: <http://www.borsaitaliana.it>