Università degli Studi di Cagliari

Facoltà di Scienze

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

La scala diatonica generalizzata e gli alberi di Stern-Brocot

Relatore
Dott. Lucio Cadeddu

Tesi di Laurea di
Sonia Cannas

Anno Accademico 2013-2014

Indice

Introduzione

Fra le culture di tutto il mondo nel corso della storia sono stati diversi i modi di dividere l'intervallo di ottava, il sistema in uso dal 1600 nella cultura musicale occidentale è quello equabile in cui l'ottava viene divisa in 12 parti uguali. In tale sistema abbiamo due tipi di scale: *cromatica* e *diatonica*, entrambe descritte nel paragrafo 3.1.

Esiste un analogo della scala diatonica standard in un dato sistema cromatico di N note anziché 12?

Il sistema temperato equabile con $N = 12$ non è l'unico esistente, ne sono un esempio il temperamento equabile con $N = 53$ note di Robert Bosanquet e quello di $N = 31$ note di Nicola Vicentino, descritti entrambi nel capitolo 3. Le motivazioni che hanno portato alla domanda iniziale non si limitano a queste: Ivan Wyschnegradsky anticipò certe intuizioni teorico-musicali nella "Prefazione" dei suoi "Preludi" op. 20, composto nel 1916.

In questo lavoro di tesi studieremo la generalizzazione del concetto di *scala diatonica* attraverso gli strumenti matematico-musicali della teoria musicale degli insiemi (*musical set theory*) e il suo collegamento con gli alberi di Stern-Brocot *riordinati*.

Come descritto nel paragrafo 4.1, la teoria musicale degli insiemi comincia a svilupparsi negli anni '60 del XX secolo nell'ambito della musica tonale, e si sviluppa per soddisfare le esigenze teoriche della musica atonale. Alla base di tale teoria vi è la rappresentazione delle scale come sottoinsiemi $A \subset \mathbb{Z}_N$, con $N \in \mathbb{Z}^+$. Partendo da tale modello sono state sviluppate altre sottoteorie, esposte nel capitolo 4, come quella delle scale ben formate (*well-formed scale*) e quella delle scale ME^*, cioè scale ME (*maximally even scales*) che godono della proprietà di Myhill, esposta nel paragrafo 4.6.

Poiché le scale diatoniche hanno un legame con gli alberi di Stern-Brocot "standard", il capitolo 2 è stato dedicato allo sviluppo della teoria dei grafi e degli alberi necessaria per la comprensione di tale legame. In particolare sono stati analizzati i grafi di Cayley e gli alberi di Stern-Brocot, particolari alberi binari, infiniti e completi i cui vertici corrispondono ai numeri razionali positivi.

Una volta spiegato il legame tra gli alberi di Stern-Brocot e la scala diatonica "standard", nel capitolo 5.4, sono presentati gli alberi di Stern-Brocot "riordinati". Tali alberi vengono rappresentati come i tradizionali alberi di Stern-Brocot, ma hanno una disposizione planare diversa.

Il contesto in cui si cerca di determinare la scala diatonica generalizzata in un dato universo cromatico $\mathbb{Z}_N$ è quello delle grandi scale ME^*, si tratta infatti di grandi scale ME^* A strettamente m-generate in cui la differenza $|A| - |A^c|$ è minima. Tale definizione vale per $N \leq 12$ e $N \neq 15$, per $N = 15$ è stata formulata la congettura secondo cui esiste solo una scala diatonica generalizzata banale, presente sempre per cardinalità cromatiche N dispari.

Riprendendo il legame fra alberi di Stern-Brocot e scala diatonica, vedremo che ciò che lega la scala diatonica generalizzata all'albero di Stern-Brocot riordinato è il rapporto $\frac{m}{N}$.

Capitolo 1

Richiami algebrici

1.1 Strutture algebriche

Definizione 1.1 (Gruppo)**.** *Sia A un insieme non vuoto e "+" un'operazione binaria definita su A. La coppia $(A,+)$ è un* gruppo *se sono soddisfatte le seguenti proprietà:*

i) *proprietà associativa:*

$$(a+b)+c = a+(b+c) \qquad \forall a,b,c \in A$$

ii) *esistenza dell'elemento neutro "0":*

$$(a+0) = a \qquad \forall a \in A$$

iii) *esistenza dell'inverso:*

$$a+(-a) = 0 \qquad \forall a \in A$$

Se vale anche la proprietà commutativa il gruppo è detto abeliano*.*

Un esempio di gruppo molto importante è il *gruppo lineare*.

Definizione 1.2 (Gruppo lineare)**.** *Si definisce* gruppo lineare *l'insieme di tutte le matrici quadrate, di ordine n invertibili*

$$GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n} | det(A) \neq 0\} \tag{1.1}$$

Esempio 1.1. $(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{C},+)$ *sono gruppi abeliani.*

Se un sottoinsieme di un gruppo è dotato della struttura di gruppo allora è detto *sottogruppo*.

Definizione 1.3 (Sottogruppo)**.** *Un sottoinsieme non vuoto H di un gruppo G viene detto* sottogruppo *di $(G,\cdot)$ se:*

i) $\forall h,h' \in H$ *l'operazione* $h \cdot h' \in H$*;*

ii) *se* $h \in H$ *allora* $h^{-1} \in H$*.*

Esiste un sottogruppo molto importante del gruppo lineare: il *gruppo lineare speciale.*

Definizione 1.4 (Gruppo lineare speciale)**.** *Si definisce* gruppo lineare speciale *l'insieme di tutte le matrici quadrate di ordine n con determinante unitario*

$$SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n}, det(A) = 1\} \tag{1.2}$$

Definizione 1.5 (Anello)**.** *Sia A un insieme non vuoto, "+' e "$\cdot$" 2 operazioni binarie definite su A. La coppia* $(A,+,\cdot)$ *è un* anello unitario *se sono soddisfatte le seguenti proprietà:*

i) $(A,+)$ *è un gruppo abeliano;*

ii) $(A,\cdot)$ *è un monoide;*

iii) *proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma:*

$$(a+b)\cdot c = ac + bc \qquad \forall a,b,c \in A$$

Esempio 1.2. $(\mathbb{Z},+,\cdot)$*, l'insieme dei polinomi in n indeterminate a coefficienti reali.*

Definizione 1.6 (Campo)**.** *Sia A un insieme non vuoto, "+' e "$\cdot$" 2 operazioni binarie definite su A. La coppia* $(A,+,\cdot)$ *è un* campo *se sono soddisfatte le seguenti proprietà:*

i) $(A,+)$ *e* $(A,\cdot)$ *sono gruppi abeliani;*

ii) *proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma:*

$$(a+b)\cdot c = ac + bc \qquad \forall a,b,c \in A$$

Esempio 1.3. $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

1.2 Aritmetica modulare

Siano $a,b \in \mathbb{Z}$ e sia $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. All'interno di $\mathbb{Z}$ definiamo la *relazione di congruenza* $\equiv_n$ come:

$$a \equiv b (\text{mod } n) \quad \Leftrightarrow \quad n|(a-b) \tag{1.3}$$

dove la notazione $p|q$ indica che p divide q, cioè che $\exists m \in \mathbb{Z}$ t.c. $q = mp$.

Definizione 1.7. *Siano* $a,b \in \mathbb{Z}$ *e sia* $n \in \mathbb{N}$ *con* $n \geq 2$*. Se vale la 1.3 si dice che* a è congruo a b modulo n.

Proposizione 1.2.1. *La relazione di congruenza modulo n è una relazione di equivalenza.*

Dimostrazione. Osserviamo che vale la riflessività: $a \equiv a \pmod{n}$ poiché $n|0 = a - a$.

Se $n|(b-a)$ allora divide anche $a - b = -(b-a)$; quindi $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow b \equiv a \pmod{n}$. Quindi vale anche la simmetria.

Se $n|(b-a)$ e $n|(c-b)$ divide anche la loro somma $c - a = (c-b) + (b-a)$. Quindi $a \equiv b$ (mod n) e $b \equiv c \pmod{n} \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$. Quindi vale anche la transitività. □

Quozientando $\mathbb{Z}$ rispetto alla relazione di congruenza 1.3 si ottiene l'insieme

$$\mathbb{Z}_n = \{[0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n\} \tag{1.4}$$

dove $[r]_n = \{nh + r | h \in \mathbb{Z}\}$ è la *classe di congruenza* modulo n, detta anche *classe di resto.*

È naturale chiedersi che rapporto abbia la relazione di congruenza con le usuali operazioni tra interi.

Proposizione 1.2.2. *Se $a \equiv a' \pmod n$ e $b \equiv b' \pmod n$, allora $a+b \equiv a'+b' \pmod n$ e $ab \equiv a'b' \pmod n$.*

Di conseguenza le operazioni

$$[a]_n + [b]_n = [a+b]_n \tag{1.5}$$
$$[a]_n \cdot [b]_n = [ab]_n \tag{1.6}$$

Sono ben definite in $\mathbb{Z}_n$.

Dimostrazione. Poiché $a \equiv a' \pmod n$ e $b \equiv b' \pmod n$ si ha $n|(a'-a)$ e $n|(b'-b)$. Ma allora $n|(a'-a)+(b'-b) = (a'+b')-(a+b)$, quindi vale la 1.5.

Inoltre $n|(a'-a)b' + a(b'-b) = a'b' - ab$, quindi vale la 1.6. □

Teorema 1.2.1. *$\mathbb{Z}_n$, dotato delle operazioni 1.5 e 1.6 è un anello commutativo.*

Dimostrazione. Le proprietà associativa, commutativa e distributiva delle operazioni discendono da quelle di $\mathbb{Z}$. L'elemento neutro rispetto alla somma è $[0]_n$, quello rispetto al prodotto $[1]_n$. L'inverso additivo di $[a]_n$ è $[-a]_n$. □

Ricordando che il massimo comune divisore $d \in \mathbb{Z}$ di $a, b \in \mathbb{Z}$ si indica con $d = (a, b)$ diamo il seguente risultato.

Lemma 1.2.1. *Siano $a, n \in \mathbb{N}$ con $a, n > 1$. Allora $[a]$ è invertibile in $\mathbb{Z}_n$ se e solo se $(a, n) = 1$.*

Dimostrazione. Se $(a, n) = 1$ allora $\exists h, k \in \mathbb{Z}$ t.c. $ha + kn = 1$. Ma allora $[h]_n[a]_n = [ha]_n = [1-kn]_n = [1]_n$, quindi $[h]_n$ è l'inverso di $[a]_n$ in $\mathbb{Z}_n$.

Viceversa, se $[a]_n$ possiede un inverso $[h]_n$ in $\mathbb{Z}_n$, allora $[ah]_n = [1]_n$, cioè $ha \equiv 1 \pmod n$. Ma allora $ha - 1 = kn$, cioè $1 = ha + kn$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$ e $(a, n) = 1$. □

Teorema 1.2.2. *Se $p \in \mathbb{Z}$ è un numero primo, allora $\mathbb{Z}_p$ è un campo.*

Dimostrazione. Se $[a]_n$ è una classe di resto diversa da $[0]_n$ allora p non divide a. In tal caso $(a, p) = 1$ e quindi $[a]_n$ possiede un inverso moltiplicativo per il lemma precedente. □

1.3 Teoria dei gruppi

Definizione 1.8 (Sottogruppo normale)**.** *Dato un gruppo G, un sottogruppo H di G è detto* normale *se $ghg^{-1} \in H$, $\forall g \in G, h \in H$.*

La definizione di sottogruppo normale ci permette di definire i *gruppi quoziente.*

Definizione 1.9 (Gruppo quoziente)**.** *Dato un gruppo G, sia H un suo sottogruppo normale. Si definisce* gruppo quoziente $G \setminus H$ *l'insieme*

$$G \setminus H = \{[g] | g \in G\}$$

Definizione 1.10. *Sia G un gruppo e $S \subseteq G$ un suo sottoinsieme. Diremo che S genera G, e gli elementi di S verranno chiamati* generatori *di G, se ogni elemento di G può essere scritto come prodotto di un numero finito di elementi di S e dei loro inversi.*

Sia S un sottoinsieme di un gruppo G. Indichiamo con $< S >$ il più piccolo sottogruppo di G generato da S che contiene S. In particolare, $< \emptyset >= \{1\}$, mentre se S non è vuoto è facile verificare che

$$< S >= \{x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n} | n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x_1, \ldots, x_n \in S, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{Z}\}$$

S si dice un *sistema di generatori* del gruppo G se $G =< S >$.

Definizione 1.11 (Gruppo finitamente generato)**.** *Sia G un gruppo. Diremo che G è* finitamente generato *se esiste un insieme finito S che genera G.*

Un esempio molto importante di gruppi finitamente generati sono i *gruppi ciclici.*

Definizione 1.12 (Gruppo ciclico)**.** *Un gruppo G si dice* ciclico *se è generato da un unico elemento, cioè*

$$G =< a >= \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$$

Esempio 1.4. *$\mathbb{Z}$ è un gruppo ciclico di ordine infinito.*

Teorema 1.3.1 (di classificazione)**.** *Un gruppo ciclico G con n elementi è isomorfo*

- *al gruppo quoziente delle classi di resto modulo n $\mathbb{Z} \setminus n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$ se n è finito;*
- *al gruppo dei numeri interi $\mathbb{Z}$ se n è infinito.*

Consideriamo ora un sistema di generatori S del gruppo G. Il sistema di generatori S si dice *libero* se, $\forall n > 1, x_1, \ldots, x_n \in X$, con $x_i \neq x_{i+1}$ (per $i = 0, \ldots, n-1$) e $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, si ha

$$x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$$

Definizione 1.13 (Gruppo libero)**.** *Un gruppo G si dice* libero *se ammette un sistema libero di generatori.*

Un altro gruppo molto importante è il *gruppo simmetrico*

Definizione 1.14 (Gruppo simmetrico)**.** *Sia $n \in \mathbb{Z}^+$ e X un insieme di n elementi. Allora il gruppo $S(X)$ delle permutazioni su X viene detto* gruppo simmetrico *su n elementi e si denota con S_n.*

Esempio 1.5. *Determiniamo il gruppo simmetrico S_1. L'unica applicazione $\{1\} \to \{1\}$ è l'applicazione identica. Quindi S_1 è un gruppo banale.*

Esempio 1.6. *Determiniamo il gruppo simmetrico S_2. Vi sono esattamente due applicazioni bigettive $\{1,2\} \to \{1,2\}$:*

- *l'applicazione identità;*
- *l'applicazione definita da $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 1$.*

Questi sono i due elementi di S_2.

Proposizione 1.3.1. *Il gruppo simmetrico S_n ha $n!$ elementi $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.*

In generale per indicare un elemento σ di S_n si può utilizzare la cosiddetta *notazione matriciale*, nella quale sono riportate, nella seconda riga, le immagini secondo σ degli elementi $1, 2, \dots, n$ della prima riga.

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{bmatrix}$$

1.4 Frazioni continue

Una *frazione continua* è un'espressione del tipo

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\vdots}}}} = [a_0; a_1, a_2, \dots]$$

dove $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_i > 1$ per $i > 1$, si chiamano *quozienti parziali.*

Ogni numero reale ammette un unico sviluppo in frazione continua, che si arresta se e solo se il numero è razionale.

Esempio 1.7.

$$\frac{7}{12} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}} = [0; 1, 1, 2, 1, 1]$$

Se il numero è irrazionale lo sviluppo è invece infinito.

Mostriamo come calcolare lo sviluppo in frazione continua di un numero $x \in \mathbb{R}$. Sia $[x_0]$ la parte intera di x_0, poniamo $a_0 = [x_0]$, allora si ha:

$$x = a_0 + x_0 \qquad 0 < x_0 < 1$$

Poi poniamo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x_0} = a_1 + x_1 \qquad a_1 = \left[\frac{1}{x_0}\right], 0 < x_1 < 1\\
&\frac{1}{x_1} = a_2 + x_2 \qquad a_2 = \left[\frac{1}{x_1}\right], 0 < x_2 < 1\\
&\dots
\end{aligned}$$

Se il numero è irrazionale il procedimento viene iterato all'infinito.

Se il numero è razionale, dopo un certo numero finito n di passi si trova $x_n = 0$ e in questo caso $x = [a_0; a_1, \dots, a_n]$.

Esempio 1.8. *Applichiamo il procedimento appena descritto per $x = \pi$. Allora*

$$\begin{aligned}
&\pi = 3 + x_0 \qquad x_0 = 0,14159\dots\\
&\frac{1}{x_0} = 7,06251\dots = 7 + x_1\\
&\frac{1}{x_1} = 15,99659\dots = 15 + x_2\\
&\frac{1}{x_2} = 1,00341\dots = 1 + x_3\\
&\dots
\end{aligned}$$

Iterando il procedimento di ottiene il seguente sviluppo:

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, \dots]$$

Per ottenere buone approssimazioni razionali di numeri irrazionali possiamo troncare lo sviluppo subito prima di grandi quozienti parziali a_n. Attraverso tali approssimazioni si ottengono i *convergenti veloci.*

Definizione 1.15 (Convergenti veloci)**.** *Si definiscono* convergenti veloci *le approssimazioni razionali ottenuto troncando lo sviluppo in frazione continua.*

I convergenti veloci si possono calcolare dai quozienti parziali mediante una formula ricorsiva.

Teorema 1.4.1. *Dato $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ allora*

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

dove

$$\begin{aligned}
p_{-2} &= 0 \qquad p_{-1} = 1 \qquad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}\\
q_{-2} &= 1 \qquad q_{-1} = 0 \qquad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}
\end{aligned}$$

Possiamo definire anche i *convergenti lenti.*

Definizione 1.16 (Convergenti lenti)**.** *Se $x \in \mathbb{R}$ ha lo sviluppo $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$, allora per ogni $n > 1$ vi sono a_n* convergenti lenti *della forma*

$$[a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, 1], \quad [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, 2], \quad \dots \quad , [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n]$$

In altri termini, per ogni $n \geq 1$ e $1 \leq r \leq a_n$ il convergente lento di ordine

$$m = \sum_{k=0}^{n-1} a_k + r$$

è il numero

$$\frac{r_m}{s_m} = \frac{rp_{n-1} + p_{n-2}}{rq_{n-1} + q_{n-2}}$$

In particolare, se $r = a_n$, quindi $m = \sum_{k=0}^{n} a_k$ allora $\frac{r_m}{s_m} = \frac{p_n}{q_n}$.

Esempio 1.9. *Sia* $x = [0; 2, 3, 2, 4, 2, 5, 2, 6, \dots] = 0,436702\dots$.

I primi cinque convergenti veloci sono:

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{3}{7} \qquad \frac{7}{16} \qquad \frac{31}{71} \qquad \frac{69}{158}$$

ma entro lo stesso grado di accuratezza vi sono $2+3+2+4+2 = 13$ *convergenti lenti:*

$$\frac{1}{1} \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{2}{5} \qquad \frac{4}{9} \qquad \frac{7}{16} \qquad \frac{10}{23} \qquad \frac{17}{39} \qquad \frac{24}{55} \qquad \frac{31}{71} \qquad \frac{38}{87} \qquad \frac{69}{158}$$

Capitolo 2

Grafi e alberi

2.1 Elementi di teoria dei grafi

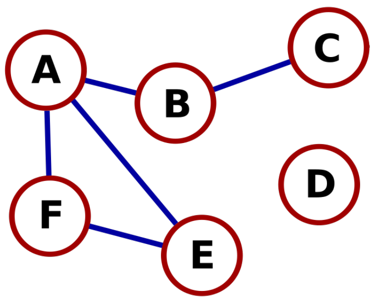
Sia V un insieme e sia $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Denotiamo con $V^{[n]}$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di V con cardinalità n.

Definizione 2.1 (Grafo)**.** *Si definisce* grafo[1] *una terna* $\Gamma = (V, E, \phi)$*, dove* V *ed* E *sono insiemi, con* $V \neq \emptyset$*, e* ϕ *è un'applicazione*

$$\phi \colon E \to V^{[2]}$$

Gli elementi di V *sono detti* nodi *o* vertici *mentre quelli di* E *sono detti* archi*.*

Due vertici $v, w \in V$ connessi da un arco $e \in E$ prendono il nome di *estremi dell'arco*. Un arco che ha due estremi coincidenti è detto *cappio*.



In un generico grafo possono esserci archi multipli e/o cappi, se invece per ogni coppia di vertici esiste al più un arco che ha tali vertici come estremi, allora il grafo è detto *semplice*.

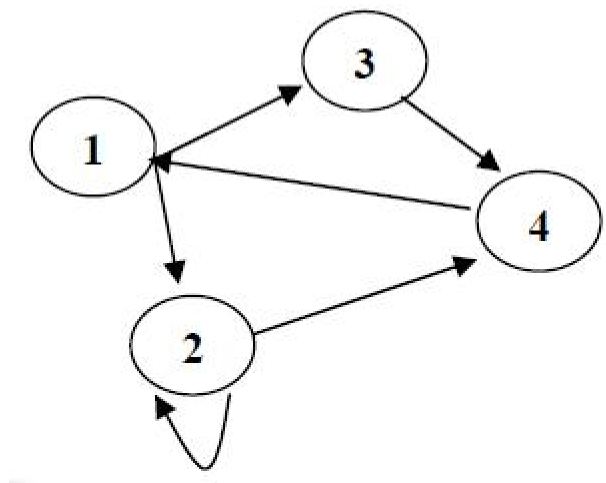
Definizione 2.2 (Grafo semplice)**.** *Un grafo si dice* semplice *se l'applicazione* ϕ *è iniettiva. Quindi un grafo semplice è una coppia* (V, E)*, dove* $V \neq \emptyset$ *ed* $E \subseteq V^{[2]}$*.*

Definizione 2.3 (Grafo finito)**.** *Un grafo si dice* finito *se l'insieme dei suoi vertici e quello dei suoi archi sono finiti.*

[1] La terminologia dei grafi presenta variazioni a seconda del testo in uso, qui è stata scelta quella utilizzata in [5]. La definizione di grafo che è stata presentata non è la più generale, tuttavia in molti testi con il termine *grafo* si definisce quello che noi chiamiamo *grafo semplice*, ciò che abbiamo definito grafo viene detto *multigrafo*.

In generale si è soliti raffigurare un grafo mediante un diagramma nel quale i vertici sono rappresentati da punti del piano, ed ogni lato da una linea di estremi i due vertici.

Esempio 2.1. *Siano* $V = \{1, 2, 3, 4\}$ *ed* $E = \{(1, 3); (1, 2); (2, 2); (2, 4); (3, 4); (4, 1)\} \subseteq V^{[2]}$. *La coppia* $\Gamma = (V, E)$ *definisce un grafo, rappresentato dal seguente diagramma*



Nell'immagine dell'esempio 2.1 possiamo osservare che negli archi sono presenti delle frecce, cioè sono orientati. In generale un grafo Γ si dice *orientato* se viene stabilita un'orientazione su di esso, cioè se ogni arco ha un verso, nel senso che possiamo descrivere ogni arco $e \in E$ come una coppia ordinata di vertici $e = (e_-, e_+)$, dove $e_- < e_+$ sono gli estremi di e.

Un vertice v ed un arco e si dicono *incidenti* se $v \in \phi(e)$ (cioè se v è un estremo di e). Due vertici $v, w \in V$, con $v \neq w$, si dicono *adiacenti* se $\{v, w\} \in \phi(E)$.

Definizione 2.4 (Grado di un vertice)**.** *Dato* $v \in V$*, il* grado *di* v *è il numero di archi incidenti a* v*, e si denota con* $d_\Gamma(v)$*.*

Definizione 2.5 (Grafo regolare)**.** *Un grafo* Γ *si dice* regolare *se tutti i suoi vertici hanno lo stesso grado.*

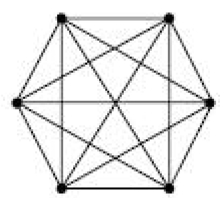
Definizione 2.6 (Grafi isomorfi)**.** *Due grafi* $\Gamma = (V, E, \phi)$ *e* $\Gamma' = (V', E', \psi)$ *si dicono* isomorfi *se esiste una coppia di applicazioni bigettive* $\alpha \colon V \to V'$ *e* $\beta \colon E \to E'$*, tali che:*

$$\psi(\beta(e)) = \alpha(\phi(e)) \qquad \forall e \in E$$

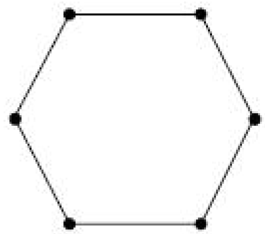
Definizione 2.7 (Grafo completo)**.** *Un grafo semplice* $\Gamma = (V, E)$ *si dice* completo *se* $E = V^{[2]}$

Due grafi completi sono isomorfi se e solo se gli insiemi dei vertici hanno la stessa cardinalità.

Esempio 2.2. *Denotiamo con* K_n*,* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*, il grafo completo su* n *vertici. Se* $n = 6$ *abbiamo il seguente grafo* K_6



Definizione 2.8 (Ciclo). *Si definisce* ciclo *di lunghezza n (o n-ciclo) il grafo semplice i cui lati sono tutti e soli quelli che costituiscono il perimetro del n-agono, e si denota con C_n.*



Definizione 2.9 (Cammino). *Sia $\Gamma = (V, E, \phi)$ un grafo, e siano $v, w \in V$ due vertici di Γ (non necessariamente distinti). Un* cammino *in Γ da v a w è una sequenza:*

$$v = v_0 \quad e_1 \quad v_1 \quad e_2 \ldots v_{n-2} \quad e_{n-1} \quad v_{n-1} \quad e_n \quad v_n = w$$

di vertici $v_0, v_1, \ldots, v_n \in V$ (non necessariamente distinti), ed archi $e_1, e_2, \ldots, e_n \in E$, tutti distinti e tali che $\phi(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Definizione 2.10 (Circuito). *Si definisce* circuito *(o anche* cammino chiuso*) un cammino in cui $v_0 = v_n$.*

Un cammino (circuito) si dice *semplice* se tutti i vertici che lo compongono, tranne eventualmente il primo e l'ultimo, sono diversi; ovvero se $\forall i, j$ t.c. $1 \leq i, j \leq n, i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j$ (il cammino non "ripassa" per uno stesso vertice). Un circuito semplice con almeno tre archi è un ciclo (in sostanza, un ciclo di lunghezza n è un sottografo isomorfo al n-ciclo C_n).

Definizione 2.11 (Grafo connesso). *Un grafo Γ si dice* connesso *se per ogni coppia di suoi vertici v, w esiste in Γ un cammino tra v e w.*

2.2 Numero cromatico

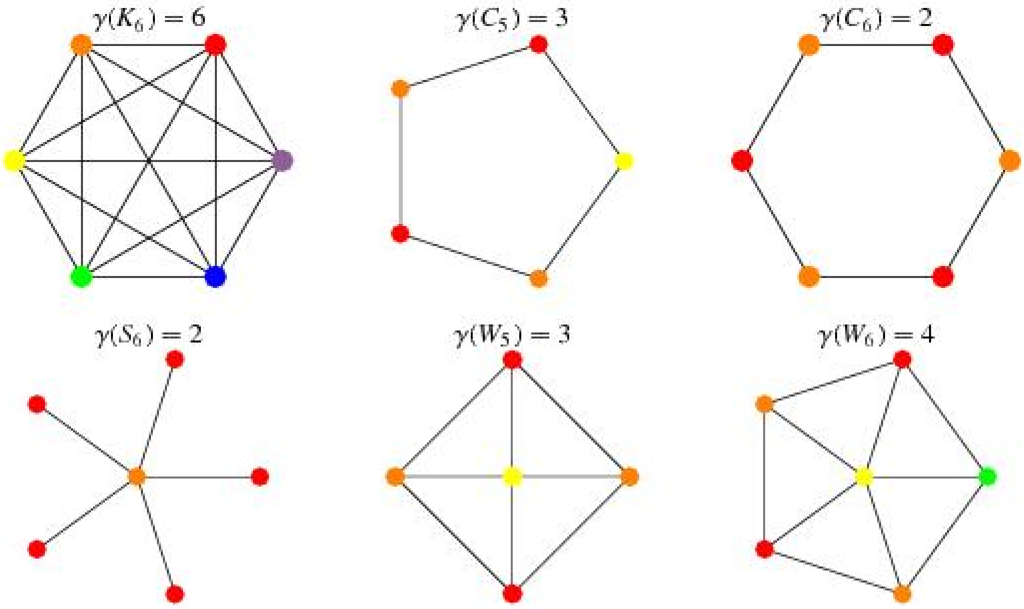
Nella teoria dei grafi è possibile definire una colorazione dei vertici di un grafo Γ: ad ogni vertice di Γ viene assegnato un colore in modo che gli estremi dell'arco abbiano colori diversi.

Definizione 2.12 (Colorazione di un grafo). *Una colorazione di un grafo $\Gamma = (V, E, \phi)$ è un'applicazione $\gamma \colon V \to S$, dove S è un insieme non vuoto i cui elementi sono detti* colori*, tale che $\forall u, v \in V$, se u e v sono adiacenti allora $\gamma(u) \neq \gamma(v)$.*

In generale se esiste una colorazione di un grafo Γ con k colori, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, allora Γ viene detto k-colorabile.

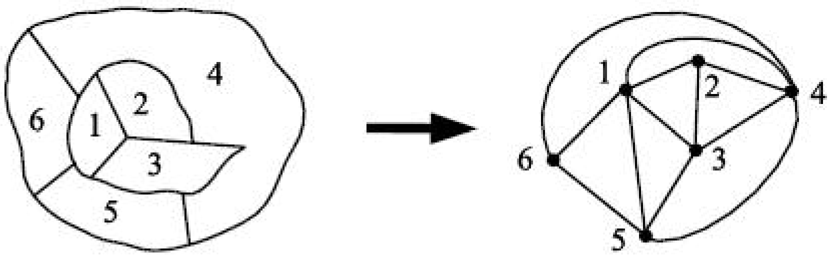
Un noto problema è la colorazione di una carta geografica politica: qual è il minor numero di colori distinti necessario per colorare una carta geografica politica in modo che non vi siano nazioni confinanti con lo stesso colore? Per dare un senso a questa domanda, dobbiamo dare la definizione di *grafo planare*.

Definizione 2.13 (Grafo piano). *Un grafo $\Gamma = (V, E, \phi)$ è un* grafo piano *se V è un sottoinsieme di punti del piano euclideo $\mathbb{R}^2$ ed E è un insieme di archi di curva continua i cui estremi appartengono a V.*



Definizione 2.14 (Grafo planare)**.** *Un grafo* $\Gamma = (V, E, \phi)$ *è un* grafo planare *se è isomorfo ad un grafo piano.*

Tradurre il problema della cartina geografica politica in termini di grafi: ad una data carta si associa un grafo i cui vertici sono le diverse nazioni e due vertici sono adiacenti se e solo se le corrispondenti nazioni sono confinanti.



Il grafo così ottenuto è planare. Ci chiediamo, quindi, quale sia il minor numero di colori con cui è possibile colorare i vertici di un grafo piano. Nel 1976 Appel e Haken dimostrarono, attraverso un complesso algoritmo informatico, che sono sufficienti 4 colori.

Teorema 2.2.1 (dei quattro colori)**.** *Ogni grafo planare è* 4*-colorabile.*

È ovvio che ogni grafo finito Γ ammette una colorazione con un numero finito di colori, ed è altresì ovvio che esiste un numero minimo di colori mediante i quali è possibile colorare Γ.

Definizione 2.15 (Numero cromatico)**.** *Si definisce* numero cromatico *il numero minimo di colori necessari per colorare un grafo* Γ*. Tale numero si indica con* $\mathcal{X}(\Gamma)$[2].

Proposizione 2.2.1. *Dato un grafo* Γ*,* $\mathcal{X}(\Gamma) = k$ *se, e solo se,* Γ *è* k*-colorabile e non è* $(k-1)$*-colorabile.*

[2]Poiché la notazione $\mathcal{X}(\Gamma)$ viene utilizzata anche per indicare la caratteristica di Eulero di un grafo talvolta il numero cromatico viene indicato con $\gamma(\Gamma)$.

Esempio 2.3. *Dato il grafo completo con n vertici K_n, $\mathcal{X}(K_n) = n$*

Esempio 2.4. *Dato il il ciclo C_n di lunghezza n, $\mathcal{X}(C_n)$ è uguale a 2 o a 3 a seconda che n sia pari o dispari.*

2.3 Grafo di Cayley

Un'importante classe di grafi regolari è quella dei *grafi di Cayley*.

Definizione 2.16 (Grafo di Cayley)**.** *Siano G un gruppo ed S un suo sottoinsieme di generatori con le seguenti proprietà:*

$$1_G \notin S \tag{2.1}$$

$$S = S^{-1} \tag{2.2}$$

Il grafo di Cayley $\Gamma[G, S]$ *è il grafo semplice il cui insieme dei vertici è G, gli archi sono tutte le coppie (g, gs) al variare di $g \in G$ e $s \in S$.*

Osservazione 2.1. *La condizione 2.1 su S serve a far sì che $g \neq gs$ $\forall g \in G, s \in S$.*

La condizione 2.2 serve a rendere simmetrica la relazione di adiacenza, poiché infatti $(g, gs) = (gs, (gs)s^{-1})$.

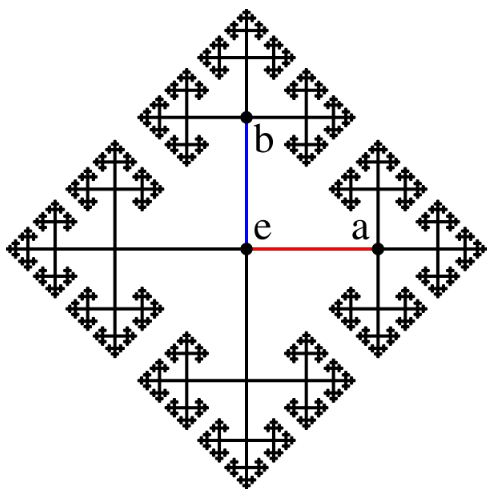


Figura 2.1: Il grafo di Cayley del gruppo libero su due generatori a e b è un albero infinito in cui ogni vertice è adiacente a quattro spigoli

Esempio 2.5. *Consideriamo il gruppo simmetrico S_3 e sia $S = \{(12), (23)\}$. Allora il grafo di Cayley $\Gamma[S_3, S]$ è un 6-ciclo.*

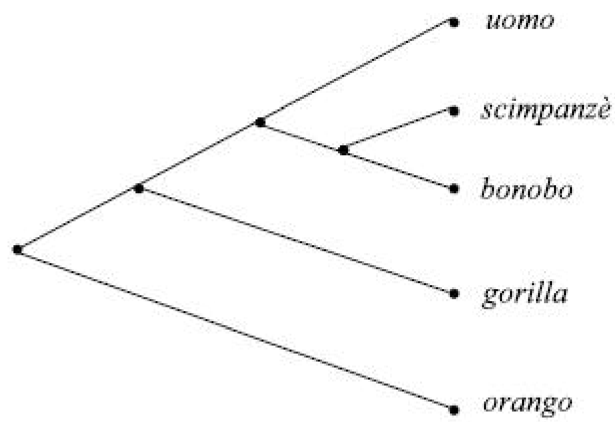
Esempio 2.6. *Sia $G = \mathbb{Z}_n$ il gruppo ciclico di ordine n e $S = \{1\}$ il generatore standard. Il grafo di Cayley è l'insieme dei vertici $0, 1, \ldots, n-1$ con un segmento per ogni coppia $(i, i+1)$, inclusa la coppia $(n-1, 0)$. Il grafo di Cayley è quindi un poligono con n lati.*

2.4 Alberi

A questo punto possiamo dare la definizione di *albero*.

Definizione 2.17 (Albero). *Si definisce* albero *un grafo semplice connesso privo di circuiti non banali, cioè privo di cicli.*

Gli alberi costituiscono un'importante classe di grafi semplici, soprattutto a causa delle loro applicazioni. Gli alberi, infatti, sono spesso un naturale modo di rappresentare relazioni di dipendenza.



Proposizione 2.4.1. *Sia* Γ *un grafo semplice. Le seguenti condizioni cono equivalenti:*

1. Γ *è un albero;*

2. *per ogni coppia di vertici di* Γ *esiste uno ed un solo cammino che li congiunge;*

3. Γ *è connesso e, per ogni suo lato e,* $\Gamma - e$ *non è connesso.*

Vediamo ora alcuni tipi di alberi comuni.

Definizione 2.18 (Albero radicato). *Un* albero radicato *è un albero in cui uno dei verici, detto* radice*, viene messo in evidenza e si distingue dagli altri.*

Dato un albero radicato T di radice r, fissato un vertice u allora ogni vertice v sul cammino da r a u è detto *antenato* di u, mentre u è detto *discendente* di v. In particolare, se (u, v) è uno spigolo di T allora u è *padre* di v, quindi v è figlio di u. Se anche (u, w) è uno spigolo di T allora v e w sono *cugini.*

Un vertice senza figli viene detto *foglia* dell'albero. Ogni vertice dell'albero si trova in un determinato *livello.*

Definizione 2.19 (Livello). *Il* livello *di un vertice di un albero è pari al livello del vertice del padre più* 1*.*

Altri alberi molto comuni sono gli alberi binari.

Definizione 2.20 (Albero binario). *Un albero* Γ *si dice* binario *se è radicato, i vertici hanno grado compreso tra* 0 *e* 2 *, cioè ogni nodo interno ha al più* 2 *figli.*

Definizione 2.21 (Albero binario infinito completo). *Un albero binario è* infinito *e* completo *se ha un'infinità numerabile di livelli in cui ogni nodo interno ha due figli.*

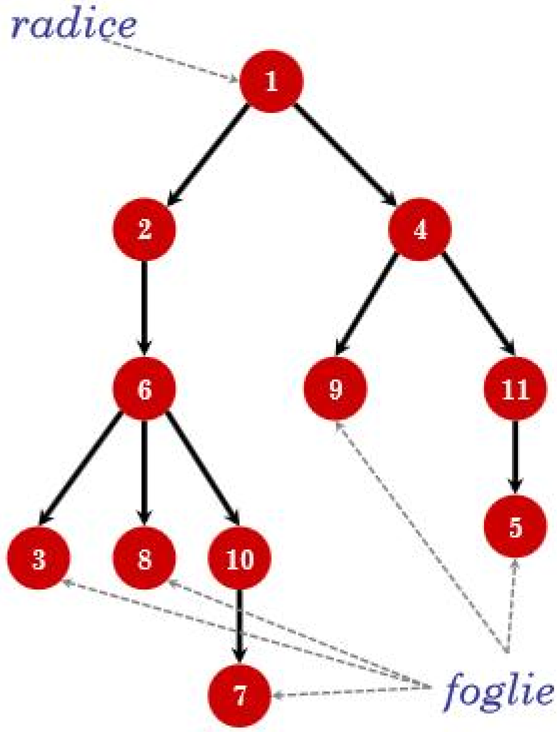


Figura 2.2: Albero radicato

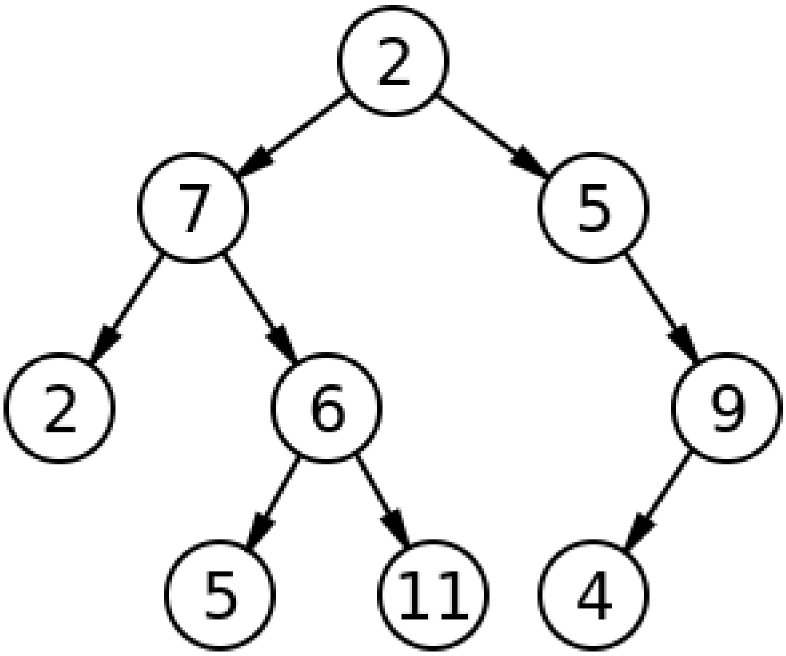


Figura 2.3: Albero binario

2.5 Alberi di Stern-Brocot

La sequenza dei convergenti lenti 1.16 può essere riguardata come un cammino su un albero di Stern-Brocot.

Gli alberi di Stern-Brocot sono dei particolari alberi binari completi e infiniti, e furono scoperti indipendentemente dal matematico tedesco Moritz Stern (1858) e dal costruttore di orologi francesi Achille Brocot (1860).

Definizione 2.22 (Albero di Stern-Brocot)**.** *Un* albero di Stern-Brocot *è un albero binario infinito e completo i cui vertici corrispondono ai numeri razionali positivi ordinati da sinistra verso destra.*

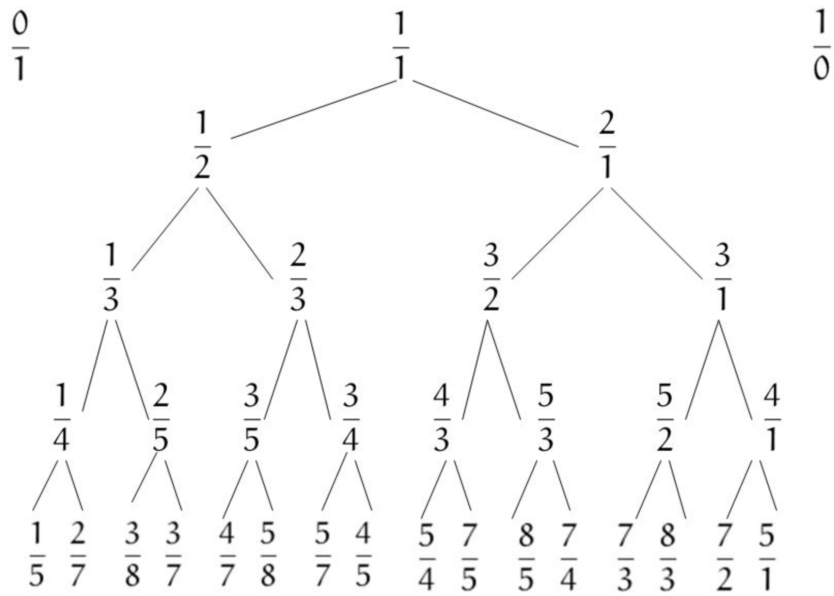
Le righe dell'albero vengono costruite attraverso la *somma di Farey*:

$$\frac{p}{q} \oplus \frac{p'}{q'} = \frac{p+p'}{q+q'} \tag{2.3}$$

Per uniformare la generazione di ciascuna coppia di figli senza far riferimento a elementi esterni, si immagina che sopra la radice $\frac{1}{1}$ ci siano le frazioni $\frac{0}{1}$ e $\frac{1}{0}$, e attraverso l'operazione 2.3 si costruisce l'albero.

La 2.3 soddisfa la seguete relazione $qp' - pq' = 1$. Inoltre vale la seguente

Proposizione 2.5.1. *Se* $\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'}$ *allora* $\frac{p}{q} < \frac{p+p'}{q+q'} < \frac{p'}{q'}$.



Osserviamo che ogni $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$ compare esattamente una volta e corrisponde ad un unico cammino finito che parte dalla radice $\frac{1}{1}$. Ponendo uguale a 0 il livello degli antenati $\frac{0}{1}$ e $\frac{1}{0}$, il numero d dei vertici fra la radice e $\frac{p}{q}$ indica il livello di quest'ultimo. Evidentemente vi sono 2^{d-1} elementi di livello $d \geq 1$. Inoltre, chiameremo *semplicità* di $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$ il numero $\frac{1}{pq}$.

Teorema 2.5.1. *I 2^{d-1} elementi dell'albero di Stern-Brocot di livello $d \geq 1$ sono tutti e soli quei numeri razionali $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$ il cui sviluppo in frazione continua $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$ soddisfa*

$$\sum_{i=0} na_i = d$$

Inoltre

$$\sum \frac{1}{pq} = 1$$

dove, per ogni assegnato $d \geq 1$, la somma è fatta su tutte le frazioni in $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$ di profondità d.

Dimostrazione. Se $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$ allora, partendo dalla radice $\frac{1}{1}$, per raggiungere $\frac{p}{q}$ occorre muoversi di a_0 passi verso destra, giungendo così al nodo $a_0 + \frac{1}{1}$, poi a_1 passi verso sinistra, giungendo ad $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{1}}$, e così via, fino all'$n$-esima deviazione (verso destra se n è pari, verso sinistra se è dispari) di a_{n-1} passi.

D'altra parte, il numero di soluzioni dell'equazione $\sum_{i=0} na_i = d$ con $0 \leq n \leq d-1$, $a_0 \geq 0$ e $a_i \geq 1$, $1 \leq i < n$ e $a_n > 1$ è uguale al numero di soluzioni con $a_i \geq 1$, $0 \leq i \leq n$.

Ora, $\forall n \geq 0$ fissato, il numero di tali soluzioni è $\binom{d-1}{n}$. Infatti, ogni scelta di $a_0 \geq 1, \ldots, a_n \geq 1$ con $a_0 + \ldots a_n = d$ è in corrispondenza biunivoca con la sequenza di n numeri

$$a_0 + \frac{1}{2} \qquad a_0 + a_1 + \frac{1}{2} \qquad \ldots \qquad a_0 + \ldots a_{n-1} + \frac{1}{2} = d - a_n - \frac{1}{2}$$

Tale sequenza può a sua volta essere riguardata come un'estrazione di n elementi dalla sequenza di $d-1$ numeri

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{3}{2} \qquad \frac{1}{2} + d - 1 = d - \frac{1}{2}$$

E vi sono appunto $\binom{d-1}{n}$ possibili estrazioni di n elementi da un insieme di $d-1$ elementi. Dunque il numero cercato è $\sum_{i=0} na_i = d$ e ciò conclude la prima parte del teorema.

Dimostriamo la seconda parte.

Se $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$, allora i suoi discendenti $\frac{p}{p+q}$ e $\frac{p+q}{q}$ potranno scriversi come

$$\frac{p}{p+q} = [0; 1, a_0, a_1, \ldots, a_n] \qquad \frac{p+q}{q} = [a_0 + 1; a_1, \ldots, a_n]$$

e dunque se $\frac{p}{q}$ è al livello d, i suoi discendenti sono al livello $d+1$. Dunque, per quanto visto, i discendenti degli elementi di una generazione formano esattamente la generazione successiva.

A questo punto si procede per induzione su d. La proprietà cercata è vera per $d = 1$. D'altra parte la semplicità di $\frac{p}{q}$ è uguale alla somma di quelle dei suoi discendenti $\frac{p}{p+q}$ e $\frac{p+q}{q}$. $\square$

Esempio 2.7.

$$\frac{8}{5} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}$$

fa parte delle 16 *frazioni di livello* 5 *ed ha semplicità* $\frac{1}{40}$.

Un numero irrazionale positivo $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$ non può quindi occupare alcun posto nell'albero di Stern-Brocot. Tuttavia si può associare ad esso un unico cammino discendente $\{x_m\}_{m\geq 1}$ di elementi dell'albero che inizia in $x_1 = 1$ e converge a x. Se $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ allora

$$x_m = \left[a_0; a_1, \dots, a_{n-1} + \frac{1}{r}\right] \qquad m = \sum_{i=0}^{n-1} a_i + r \qquad 1 \leq r \leq a_n$$

Osserviamo che se $m \leq a_0 + 1$ allora $x_m = m$. Quindi, dato un numero irrazionale positivo x, il cammino sull'albero che converge a x coincide con la successione dei convergenti lenti.

Rappresentazione matriciale dei razionali positivi

Ogni razionale positivo $x \in \mathbb{Q}^+$ può essere decomposto in modo unico come

$$x = \frac{b}{d} \oplus \frac{a}{c} \qquad ad - bc = 1$$

Possiamo quindi rappresentare i razionali positivi attraverso matrici 2×2 con entrate interi positivi e determinante unitario, cioè come elementi del gruppo lineare speciale $SL(2, \mathbb{N})$:

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{a+b}{c+d}$$

Osserviamo che le colonne della matrice $X \in SL(2, \mathbb{N})$ che rappresenta x sono i genitori di x nell'albero di Stern-Brocot in ordine invertito (nella colonna di sinistra c'è il più grande, in quella di destra il più piccolo). In particolare, la radice dell'albero è identificata con la matrice identità $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, mentre le frazioni $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{1}$ sono rappresentate rispettivamente da

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A sua volta, ogni numero razionale positivo x ha un'unica coppia di figli (sinistro e destro), dati rispettivamente da

$$\frac{a}{c} \oplus \frac{a+b}{c+d} \qquad \frac{a+b}{c+d} \oplus \frac{b}{d}$$

Ma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+b}{c+d} \oplus \frac{b}{d}$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{c} \oplus \frac{a+b}{c+d}$$

Quindi le matrici L e R, fatte agire da destra, permettono di "muoverci" verso i figli dell'albero, sinistro e destro rispettivamente.

Se invece, applichiamo L e R da sinistra si ottiene

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & b\\ a+c & b+d\end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{a+b}{a+b+c+d}$$
$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a+c & b+d\\ c & d\end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{a+b+c+d}{c+d}$$

Quindi moltiplicando a sinistra per le matrici L e R ci "muoviamo" verso i discendenti sinistro e destro rispettivamente.

Di conseguenza, ogni numero razionale positivo $x \in \mathbb{Q}^+$ si può rappresentare come una matrice $X \in SL(2, \mathbb{N})$ la quale, a sua volta, si può scrivere come un prodotto di matrici L e R il cui numero dei suoi fattori è pari al livello di x meno uno.

Esempio 2.8. *Il razionale positivo $\frac{8}{5}$ ha come genitori $\frac{3}{2}$ e $\frac{5}{3}$, quindi è rappresentato dalla marice*

$$\begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

A sua volta tale matrice si può scrivere come RLRL:

$$RLRL = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

Quindi, $\forall x \in \mathbb{Q}^+$ si ha

$$x = [a_0; a_1, \dots, a_n] \qquad \Leftrightarrow \qquad X = \begin{cases} R^{a_0}L^{a_1}R^{a_2}\cdots R^{a_n-1}, & n \text{ pari} \\ R^{a_0}L^{a_1}R^{a_2}\cdots L^{a_n-1}, & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Codificando $\{L, R\}$ con $\{0, 1\}$, tale rappresentazione consente di associare in modo naturale ad ogni $x \in \mathbb{Q}^+$ una sequenza binaria $\sigma(x) \in \{0, 1\}^*$.

Se invece $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$ allora al cammino $\{x_m\}_{m\geq 1}$ che converge a $x \in \mathbb{R}^+$ corrisponderà una sequenza binaria $\sigma \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ data da

$$x = [a_0; a_1, a_2, \dots] \qquad \Leftrightarrow \qquad \sigma(x) = 1^{a_0}0^{a_1}1^{a_2}\dots$$

Capitolo 3

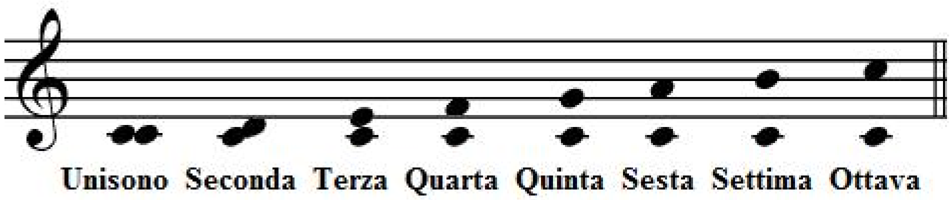
Teoria musicale

Diamo alcune definizioni di teoria musicale necessarie per la comprensione dei capitoli successivi.

3.1 Scale e intervalli

Definizione 3.1 (Intervallo)**.** *Si definisce* intervallo *la differenza d'altezza fra due suoni, esprimibile in fisica acustica con il rapporto delle frequenze dei suoni stessi.*

Il nome di un intervallo si determina contando le linee e gli spazi che separano le due note sul rigo musicale.



ll rapporto delle frequenze che caratterizzano l'intervallo di ottava è 2 : 1.

Una scala musicale è una successione graduale di un dato numero di suoni che dividono in altrettante parti l'intervallo di ottava. Le note di una scala sono definite anche *gradi* della scala, e il I grado[1] viene chiamato *tonica*.

Ogni sistema musicale ha la sua scala, definita sia dalla diversa distribuzione degli intervalli fra i gradi che la costituiscono che per ampiezza dei medesimi. Nella storia della musica occidentale i procedimenti per dividere l'intervallo di ottava in un dato numero di parti sono stati principalmente tre, da essi hanno avuto origine: la scala pitagorica, la scala naturale e il temperamento equabile. Quest'ultimo è il sistema in uso dalla fine del 1600 nel mondo occidentale, in esso l'intervallo di ottava viene diviso in 12 parti uguali dette *semitoni*. A differenza dei sistemi musicali utilizzati in passato, nel sistema temperato equabile due semitoni formano esattamente un tono.

In tale sistema abbiamo principalmente due tipi di scale: *cromatica* e *diatonica*.

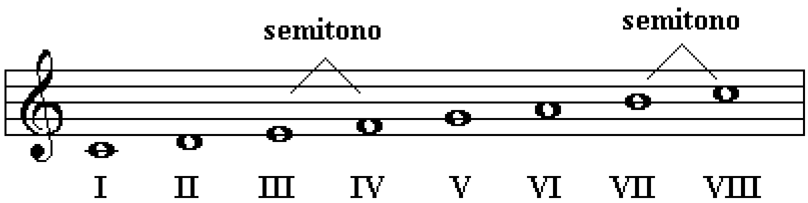
[1] I gradi della scala vengono indicati con i numeri romani.

Definizione 3.2 (Scala cromatica)**.** *La* scala cromatica *è la scala che comprende tutti i possibili suoni di un sistema; nel nostro temperamento equabile è definita come la successione di* 12 *semitoni contigui.*

Definizione 3.3 (Scala diatonica)**.** *La* scala diatonica *è una scala di* 7 *note e può essere di due tipi:*

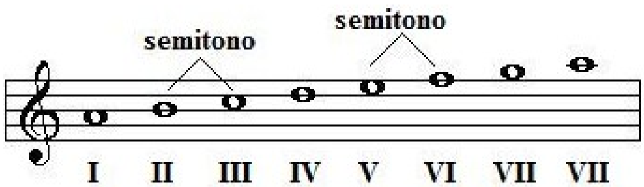
- *maggiore;*
- *minore.*

La scala maggiore è costituita da 5 toni e 2 semitoni, questi ultimi disposti fra il III e il IV grado e l'altro tra il VII e l'VIII.

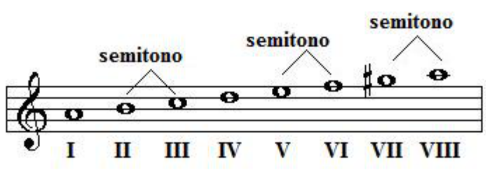


La *scala minore* si presenta in tre diverse forme:

a) la *scala minore naturale*, costituita anch'essa da 5 toni e 2 semitoni, questi ultimi disposti tra il II e il III grado e tra il V e il VI;



b) la *scala minore armonica*, costituita da 3 toni, 3 semitoni (tra il II e il III grado, tra il V e il VI e tra il VII e l'VII) e un tono e mezzo (tra il VI e il VII grado);

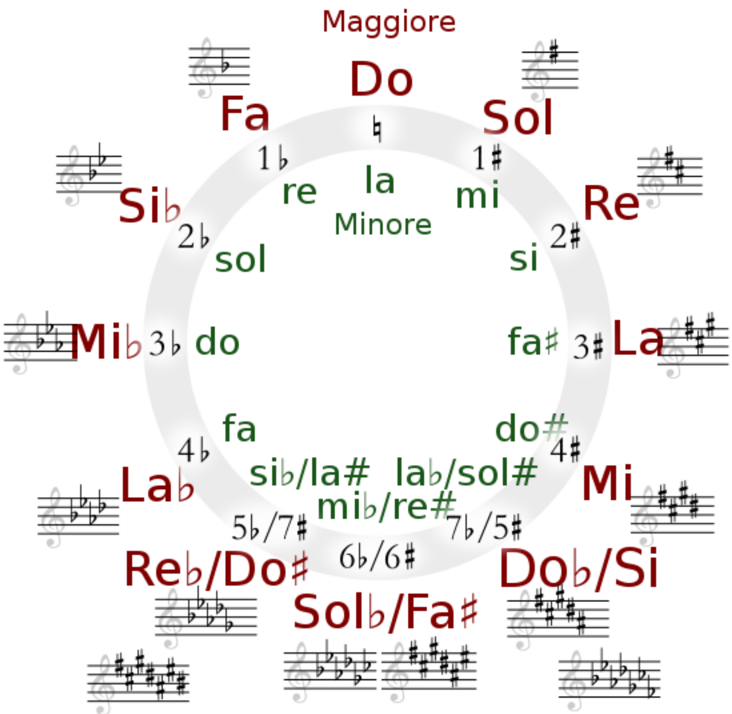


c) la *scala minore melodica*, costituita da 5 toni e 2 semitoni sia nel moto ascendente che in quello discendente, ma mentre nel moto ascendente i semitoni si trovano l'uno tra il II e il III grado (come nel moto discendente) e l'altro tra il VII e l'VIII, in quello discendente quest'ultimo semitono si sposta fra VI e V grado.

Tutte le scale maggiori o minori presentano la stessa successione di toni e semitoni, indipendentemente dalla tonica scelta.

Ad ogni scala maggiore viene associata una scala *relativa* minore, la cui tonica si trova una terza sotto quella della scala maggiore.

Tutte le possibili scale maggiori, con le relative minori, formate su ognuno dei dodici suoni della scala cromatica, possono essere disposte nel *circolo delle quinte*.



Tale disposizione prevede le armature di chiave caratterizzanti le scale collocate in modo da formare un cerchio, secondo una progressione crescente di diesis o decrescente di bemolli. Il circolo delle quinte viene definito in tale modo poiché percorrendo il cerchio in senso orario la tonica di ciascuna scala si trova a distanza di quinta da quella della scala precedente.

Osservazione 3.1. *Nel circolo delle quinte troviamo alcune tonalità che si trovano nella medesima posizione ma hanno nomi diversi. In generale nel sistema temperato equabile occidentale esistono* *note diverse, con nomi diversi, che rappresentano lo stesso suono poiché hanno la stessa altezza (ad esempio: Do#=Re b, Sol b=Fa#). Tali note si dicono* enarmoniche.

Un intervallo è definito da due elementi: il primo indica la distanza fra i due suoni (seconda, terza, quarta, ecc...), il secondo indica la sua specifica funzione tonale nel contesto musicale (quale tipo di terza, quarta, ecc...), e può essere determinata mediante un confronto con la scala maggiore formata a partire dalla nota più grave delle due note. Se la nota superiore coincide con una nota della scala, l'intervallo è *maggiore* (se si tratta di seconde, terze, seste o settime) o *giusto* (se si tratta di ottave, quinte, quarte o unisoni). Se la nota superiore non coincide con una nota della scala, si devono applicare i seguenti criteri:

a) la differenza tra un intervallo maggiore e uno *minore* con lo stesso nome generico è di un semitono;

b) ampliando di un semitono un intervallo maggiore o giusto diventa *aumentato*, ampliandolo di due semitoni diventa *più che aumentato*;

c) riducendo di un semitono un intervallo minore o giusto, questo diventa *diminuito*, riducendolo di due semitoni diventa *più che diminuito*.

La sovrapposizione di due o più suoni dà luogo ai cosiddetti *accordi*.

Definizione 3.4 (Accordo)**.** *Si definisce* accordo *la sovrapposizione di due o più intervalli armonici*[2]*.*

Le note dell'accordo vengono ordinate per intervalli di terza.

Esistono vari tipi di accordi, principalmente essi differiscono per il numero di suoni che li compongono e per gli intervalli fra tali suoni. I più semplici sono le *triadi*, costituite da 3 note che si ottengono sovrapponendo due intervalli di terza. Sono molto utilizzate anche le *settime*, accordi formati dalla sovrapposizione di 4 note.

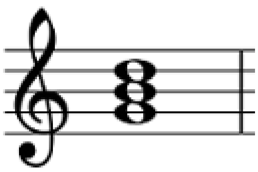


Figura 3.1: Triade sul V grado di Do Maggiore

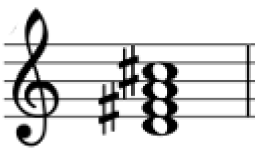


Figura 3.2: Accordo di settima sul I grado di Re Maggiore

3.2 I temperamenti equabili

Come già detto, nel temperamento equabile si divide l'intervallo di ottava in dodici semitoni uguali, quindi l'ampiezza a di ciascuno deve soddisfare la seguente relazione:

$$a^{12} = 2:1 \quad \Rightarrow \quad a = 2^{\frac{1}{12}}$$

Quanto si parla di *temperamento equabile* generalmente si intende quello appena descritto. In realtà sono esistiti altri tipi di temperamenti equabili.

[2]Gli intervalli armonici sono quelli le cui note vengono emesse in contemporanea.

Il temperamento equabile con 53 note

Nel 1876, Robert Bosanquet costruì un armonium con 53 note per ottava.

Anche questo è un temepramento equabile poiché l'ottava viene divisa in parti uguali, l'ampiezza di ciascun microintervallo è data da:

$$a^{53} = 2 : 1 \quad \Rightarrow \quad a = 2^{\frac{1}{53}}$$

L'intervallo di quinta in questa scala corrisponde a 31 tali microintervalli, si dimostra facilmente che questa è una buona approssimazione della quinta giusta, migliore anche di quella del temperamento equabile attualmente in uso. Già il teorico musicale cinese Ching Fang (78-37 a.C.) osservò che 53 quinte giuste approssimano 31 ottave e ne determinò l'errore. Nel 1694, l'ecclesiastico e teorico musicale inglese William Holder, pubblicò un trattato in cui illustrò come il temperamento equabile con 53 note approssimi molto bene anche la terza maggiore.

Il temperamento equabile con 31 note

Un altro temperamento equabile di grande interesse è quello del *ciclo armonico*, descritto per la prima volta dal compositore Nicola Vicentino (1511-1572), che consiste nella divisione dell'ottava in 31 parti uguali, ciascuna di ampiezza:

$$a^{31} = 2 : 1 \quad \Rightarrow \quad a = 2^{\frac{1}{31}}$$

Il clavicembalo di Vito Trasuntino, visibile al Museo internazionale e biblioteca della musica di Bologna, ha 31 tasti per ottava ripartiti nel modo seguente: ogni ottava ha gli usuali sette tasti bianchi intervallati da cinque gruppi di quattro tasti neri (ciascuno situato nel posto usuale riservato ai tasti neri), e altri due tasti neri tra le due coppie di tasti bianchi usualmente privi di separazione ($7 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 31$).

Anche in tale temperamento la quinta giusta e la terza maggiore sono ben approssimate.

Capitolo 4

Musical set theory

4.1 Cenni storici e motivazioni

Nel tardo '800 cominciò a svilupparsi l'esigenza di cercare nuove possibilità musicali abbandonando la musica tonale. Le vie d'uscita dalla tonalità furono molteplici. Alcuni compositori come Musorgskij, Bartok, Debussy e Stravinskij, si allontanarono dal sistema tonale che aveva caratterizzato la musica settecentesca e ottocentesca prendendo spunto dai sistemi tonali delle loro terre d'origine. Altri compositori invece, come Schoenberg, Webern e Berg, giunsero ad una rottura completa con il passato arrivando alla completa atonalità. Nelle composizioni atonali non viene utilizzata una sorta di gerarchia fra suoni che si concentrano su un tono centrale, vengono utilizzate tutte le note della scala cromatica con funzioni indipendenti le une dalle altre.

Le proprietà di elementi musicali come gli accordi, in un contesto tonale sono completamente descritte dalla teoria armonica tradizionale. Nel campo della musica post-tonale, invece, la teoria tradizionale non è in grado di fornire delle risposte esaurienti in merito al ruolo e al significato strutturale di certe formazioni accordali. Il vocabolario armonico della musica post-tonale è molto più variegato e complesso di quello della musica tonale, e le sue unità fondamentali non sono più esclusivamente triadi, ma possono essere determinate da una qualsiasi composizione delle note che compongono la scala cromatica. Per individuare delle regole di comportamento e delle relazioni significative fra i complessi ed eterogenei aggregati di note della musica post-tonale si è sviluppata la cosiddetta *teoria musicale degli insiemi*.

Tale teoria nasce negli Stati Uniti, nel secondo dopoguerra, e parte dalla teoria matematica degli insiemi elaborata da Georg Cantor fra il 1874 e il 1897. Fu utilizzata in campo musicale intorno al 1960 dal compositore, direttore e teorico della musica Howard Hanson per la musica tonale e, successivamente, dal musicologo e teorico della musica Allen Forte nel *The Structure of Atonal Music* (1973) per la musica atonale. I concetti della teoria degli insiemi elaborati sono molto generali e vengono applicati per musiche tonali e atonali in qualsiasi temperamento equabile. L'oggetto d'indagine principale è la musica atonale, la quale non appartiene ad un passato già storicizzato e risolto ma ad un presente ricco di ricerche su nuovi orizzonti creativo-musicali. Questo connubio, tra esigenze della sperimentazione compositiva da un lato, e necessità dell'interpretazione analitica dall'altro, ha condizionato in maniera determinante sia la nascita che gli sviluppi della teoria musicale degli insiemi.

L'applicazione della teoria degli insiemi al campo della musica presuppone una sostituzione della notazione tradizionale delle note con una rappresentazione di tipo numerico. L'utilizzo di tale notazione ha però suscitato non poche perplessità fra i musicisti. Ricordiamo che l'utilizzo dei numeri nella musica non è una forzatura: nell'armonia tradizionale si usano abitualmente i numeri romani per indicare per rappresentare i gradi armonici, quelli arabi per rappresentare gli intervalli, ecc... Bryan Simms nel *The Theory of Pitch-Class Sets* (1993) scrisse infatti:

"*La rappresentazione degli elementi musicali in forma di insiemi di numeri costituisce il primo passo verso la creazione di un modello della struttura musicale. I modelli sono interpretazioni relativamente semplici di fenomeni più complessi. [...] In campo musicale la funzione di un modello è principalmente esplicativa. Un modello musicale costituisce infatti una sorta di ritratto formale degli elementi, delle relazioni e delle connessioni logiche che caratterizzano un sistema.*"

Gli studi più importanti sulla teoria musicale degli insiemi vengono pubblicati nei periodici *Journal of Music Theory* e *Perspectives of New Music* e sulle riviste *Music Theory Spectrum* (fondata nel 1979, è l'organo ufficiale della *Society of Music Theory*), *Music Analysis* (nata nel 1982), *Analyse Musicale* (fondata nel 1985, ha sospeso le pubblicazioni dal 1993), *Theory and Practice*, *In Theory Only* e *Indiana Theory Review*.

4.2 Classi di altezze

Una delle tre caratteristiche fisiche del suono è l'altezza, che ci permette di distinguere un suono acuto da uno grave ed è rappresentata dalla frequenza di un'onda sonora in scala logaritmica.

Definizione 4.1 (Classe di altezze)**.** *Una* classe di altezze *(pitch class), in analisi musicale, è un insieme formato da tutte le altezze che sono presenti ad un numero intero di ottave di distanza.*

Ad esempio la classe di altezze Do è l'insieme di tutti i Do in tutte le ottave e, utilizzando la notazione scientifica delle altezze (SPN)[1] si rappresenta nel modo seguente:

$$C = \{C_n | n \in \mathbb{Z}\}$$

Anche se tale insieme non è limitato solo un certo numero di queste frequenze sono udibili all'orecchio umano.

La classe delle altezze è molto importante poiché la percezione dei suoni è periodica: le altezze appartenenti alla stessa classe vengono percepite dall'orecchio umano come se fossero la stessa nota a causa delle armoniche strettamente correlate. Per questo motivo si è soliti dare lo stesso nome alle note che distano un'ottava l'una dall'altra. Matematicamente ciò si esprime dicendo nel sistema temperato equabile in cui l'ottava è composta da 12 semitoni, due altezze $x, y \in \mathbb{R}^+$ sono equivalenti se e solo se la loro distanza è di un'ottava, cioè:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x = 2^n y \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{4.1}$$

[1] In Inglese come *Scientific pitch notation*, è uno dei diversi metodi per rappresentare le note della scala cromatica occidentale. Ogni nota è rappresentata da una lettera che, nel sistema anglo-tedesco, rappresenta il nome della nota, eventualmente un accidente musicale (se la nota è diesis o bemolle), e un numero che rappresenta l'ottava in cui si trova la nota. C_0 rappresenta il Do di 16 Hz, il Do centrale del pianoforte è C_4.

Tale relazione prende il nome di *equivalenza di ottava.* Poiché un'ottava è composta da 12 semitoni, le classi di altezze possono essere rappresentate su un cerchio che mette in corrispondenza biunivoca l'insieme delle classi di altezze e $\mathbb{Z}_{12}$.

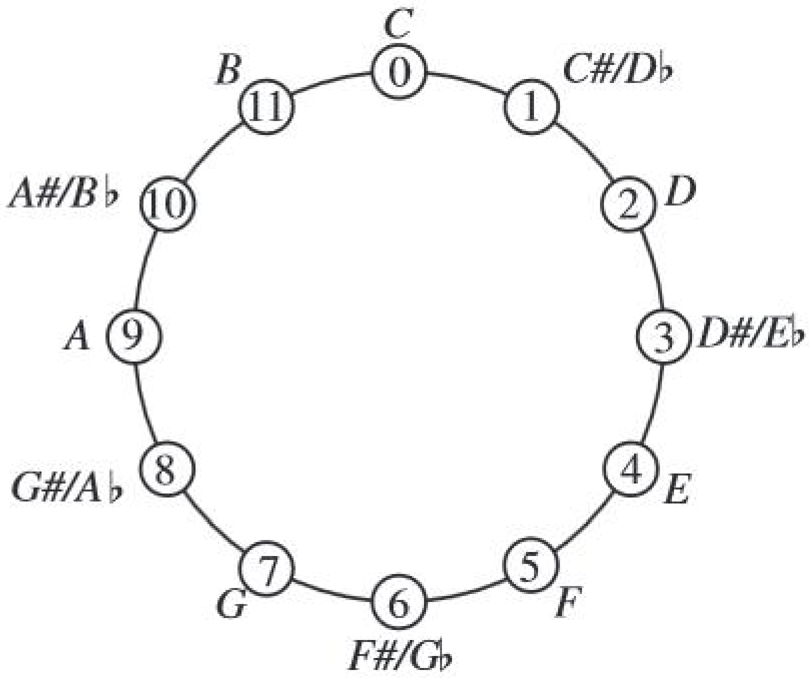


Figura 4.1: Modello di rappresentazione delle classi di altezze

Quindi, a ciascuna delle 12 note della scala cromatica, resta associato un numero compreso fra 0 e 12, viceversa ad ogni numero di $\mathbb{Z}_{12}$ resta associata una nota della scala cromatica, cioé:

$$C = 0 \quad C\# = Db = 1 \quad D = 2 \quad D\# = Eb = 3 \quad E = 4 \quad F = 5$$
$$F\# = Gb = 6 \quad G = 7 \quad G\# = Ab = 8 \quad A = 9 \quad A\# = Bb = 10 \quad B = 11$$

Chiaramente questo modello di interi per rappresentare le altezze non viene utilizzato per le performance, ma è uno strumento analitico e compositivo comune quando si lavora con la musica cromatica, seriale, o atonale.

Più in generale: dato un sistema musicale in cui l'intervallo di ottava viene diviso in N parti, con $N \in \mathbb{Z}^+$, esiste una corrispondenza biunivoca tra le N note della scala cromatica e $\mathbb{Z}_N$.

A questo punto possiamo dare la definizione di scala musicale e di intervallo secondo la teoria musicale degli insiemi:

Definizione 4.2 (Scala)**.** *Una* scala *A in un universo cromatico* $\mathbb{Z}_N$*, con* $N \in \mathbb{Z}^+$*, è un insieme di classi di altezze, quindi* $A \subset \mathbb{Z}_N$*.*

I teorici e compositori come Milton Babbit, Allen Forte e Elliot Carter definirono sulle scale musicali una relazione di equivalenza: due insiemi di classi di altezze sono equivalenti se si possono ottenere l'una dall'altra attraverso trasposizioni e inversioni[2].

[2]Per approfondimenti su trasposizioni e inversioni si veda il paragrafo successivo.

Definizione 4.3 (Scala diatonica)**.** *La* scala diatonica *(maggiore) del nostro sistema musicale è una scala di* 7 *classi di altezze che suddividono l'intervallo di ottava in* 5 *toni e* 2 *semitoni.*

Esempio 4.1. *La scala diatonica di Do (maggiore) è:*

$$\{C, D, E, F, G, A, B\} = \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$$

Definizione 4.4 (Intervallo)**.** *Si definisce* intervallo *ogni coppia ordinata di classi di altezze.*

Esempio 4.2. *L'intervallo Do-Mi b viene rappresentato matematicamente dalla coppia* $(0, 3)$.

4.3 Trasposizioni e inversioni

Le operazioni principali che possono essere eseguite su insiemi di classi di altezze, cioè su scale musicali, sono la *trasposizione* (transposition) e l'*inversione* (inversion)[3].

Definizione 4.5 (Trasposizione)**.** *Si definisce* trasposizione *l'applicazione:*

$$\begin{aligned} T_n \colon \mathbb{Z}_{12} &\to \mathbb{Z}_{12} \\ x &\mapsto T_n(x) = x + n \end{aligned} \tag{4.2}$$

Esempio 4.3. *Sia* $A = \{0, 1, 2\} \subset \mathbb{Z}_{12}$. *Considerando la traspozione di* 5 *semitoni di* A *otteniamo*

$$T_5(A) = \{5, 6, 7\}$$

Definizione 4.6 (Inversione)**.** *Si definisce* inversione *l'applicazione:*

$$\begin{aligned} I_n \colon \mathbb{Z}_{12} &\to \mathbb{Z}_{12} \\ x &\mapsto I_n(x) = -x + n \end{aligned} \tag{4.3}$$

Osservazione 4.1. *Sebbene la teoria musicale degli insiemi utilizzi lo stesso linguaggio della teoria matematica degli insiemi, ci sono alcuni termini differenti tra le due teorie. Osserviamo infatti che quella che in musica viene chiamata trasposizione in matematica viene detta traslazione (o anche rotazione se si pensa alla rappresentazione delle classi di altezze sul cerchio), invece l'inversione musicale matematicamente è una riflessione.*

Poiché trasposizione e inversione sono isometrie nello spazio delle classi di altezze, esse conservano la struttura intervallare di un insieme, quindi il suo carattere musicale. Tale osservazione non è banale: l'operazione di complementazione, ad esempio, non conserva necessariamente il carattere musicale degli oggetti che trasforma.

È interessante considerare una particolare categoria di classi di altezze, ossia quella a *trasposizione limitata*.

Definizione 4.7 (Insieme di classi di altezze a trasposizione limitata)**.** *Si dice a* trasposizione limitata *un insieme di classe di altezze tale che esiste un elemento diverso dall'identità del gruppo delle trasposizioni* T_n *che lo trasforma in sé stesso.*

[3] Il termine *inversione* in musica ha diversi significati, in uno degli usi più frequenti si riferisce a quello che in Italiano è chiamato *rivolto* di un intervallo. In questa trattazione con il termine inversione indicheremo sempre la trasformazione definita nella teoria musicale degli insiemi.

Esempio 4.4. *La scala esatonale espressa dall'insieme di classi di altezze* $\{C, D, E, F\#, G\#, A\#\}$ *è a trasposizione limitata.*

4.4 Scale ben formate

Nel 1989 Norman Carey e David Clampitt pubblicarono un articolo dal titolo *"Aspects of well-formed scales"* (vedi [4]), in cui proposero una teoria sulle scale musicali ben formate (well-formed scales, appunto). Riprendiamo la scala maggiore diatonica, riassumiamo la sequenza di toni T e semitoni sT che la caratterizzano come segue:

$$T - T - sT - T - T - T - sT$$

Ogni scala di questo tipo può essere generata a partire da un intervallo di quinta giusta:

1. si sceglie la tonica della scala da ottenere;
2. partendo da una nota prefissata che si trova una quinta sotto la tonica, si costruisce una progressione di quinte;
3. si riordinano le note ottenute.

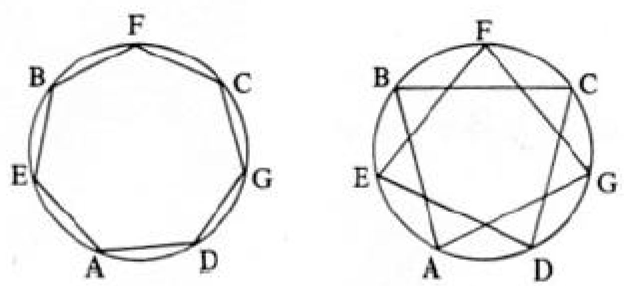
Esempio 4.5. *Supponiamo di voler costruire la scala di Do Maggiore.*

1. *La tonica di Do Maggiore è Do.*
2. *La nota prefissata da cui partire si trova una quinta sotto, quindi è il* Fa*. La sequenza ottenuta attraverso la progressione di quinte sarà:* $Fa, Do, Sol, Re, La, Mi, Si$.
3. *Riordinando tali note si ottiene la scala desiderata:* $Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do$.

In generale è possibile costruire scale aggiungendo ripetutamente un intervallo costante che funge da *generatore*. Ciò è possibile quando il generatore è primo con 12 o, più in generale, se si considera un universo cromatico $\mathbb{Z}_N$, il generatore deve essere primo con N. Una scala generata è così definita:

Definizione 4.8 (Scala generata). $A \subset \mathbb{Z}_N$ *è generata da* f *se* $A = \{f, 2f, 3f, \ldots, nf\}$.

La ragione per cui la scala diatonica comunemente usata sia formata da 7 note può essere compresa in termini di simmetria rotazionale: organizzando le note della scala per quinte in circolo, esse hanno pari grado di simmetria rotazionale. Ciò significa che il numero di note comprese tra due multipli successivi del generatore (ivi compreso uno dei due), è costante. Nel caso in cui il numero di note $N = 7$ tale numero è pari a 4.



Associando la progressione delle quinte a partire dal Fa con i numeri dell'insieme $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, \cdots, 6\}$, possiamo osservare che la differenza tra due note consecutive sia pari a 1, oppure a -6, ma $-6 \equiv 1 \pmod 7$, quindi possiamo considerare tale differenza sempre uguale a 1. Inoltre possiamo definire l'automorfismo-permutazione

$$\begin{aligned} \pi \colon \mathbb{Z}_7 &\to \mathbb{Z}_7 \\ k &\mapsto 2k (\text{mod } 7) \end{aligned}$$

che riordina le note della scala, infatti:

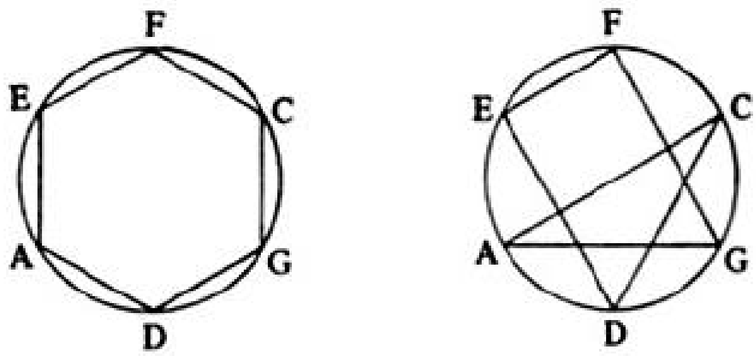
$$\begin{aligned} &Fa = 0 \mapsto 2 \cdot 0 = 0 = Fa \\ &Do = 1 \mapsto 2 \cdot 1 = 2 = Sol \\ &Sol = 2 \mapsto 2 \cdot 2 = 4 = La \\ &Re = 3 \mapsto 2 \cdot 3 = 6 = Si \\ &La = 4 \mapsto 2 \cdot 4 = 8 \equiv 1 (\text{mod } 7) = Do \\ &Mi = 5 \mapsto 2 \cdot 5 = 10 \equiv 3 (\text{mod } 7) = Re \\ &Si = 6 \mapsto 2 \cdot 6 = 12 \equiv 5 (\text{mod } 7) = Mi \end{aligned}$$

Il numero 2 è qui il numero costante di note che compaiono tra due note consecutive della scala (inclusa una delle due). Osserviamo che l'inverso

$$\begin{aligned} \pi^{-1} \colon \mathbb{Z}_7 &\to \mathbb{Z}_7 \\ k &\mapsto 2^{-1} k \equiv 4k (\text{mod } 7) \end{aligned}$$

e 4 è il numero costante di note che compaiono lungo la scala tra due successivi multipli del generatore (incluso uno dei due).

La simmetria rotazionale in generale non vale se $N \neq 7$. Se, ad esempio, $N = 6$ il numero di note comprese tra due multipli del generatore può essere uguale a 1, 3 o 4, quindi non è costante, infatti si perde la simmetria precedente.

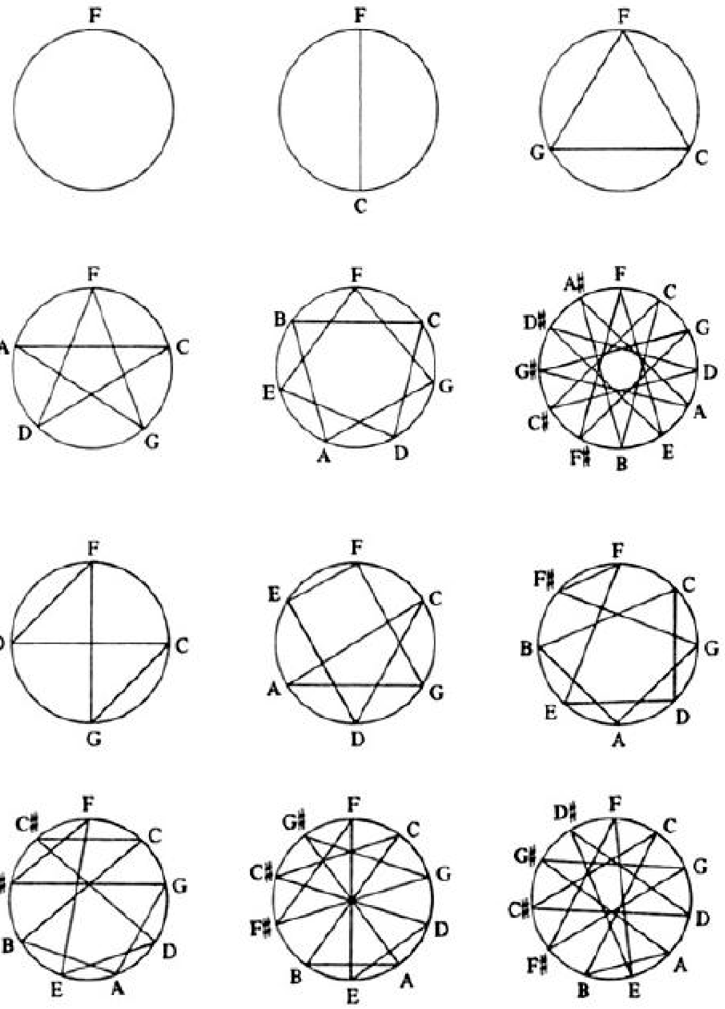


Definizione 4.9 (Ordine di scala)**.** *Una sequenza* $(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$ *si dice in* ordine di scala *se* $x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1}$.

Quindi, intuitivamente, le scale ben formate sono scale generate da quinte consecutive in cui la simmetria di rotazione è preservata dall'ordine di scala.

Definizione 4.10 (Scala ben formata)**.** *Sia* $\mathbb{Z}_N$ *un insieme di classi di altezze generate da quinte consecutive. Si dice che tali classi di altezze corrispondono alle note di una* scala ben formata *se esiste un automorfismo* $\pi\colon \mathbb{Z}_N \to \mathbb{Z}_N$ *che permuta gli elementi di* $\mathbb{Z}_N$ *in ordine di scala.*

Procedendo come sopra si può osservare che si ottengono scale ben formate solo quando $N = 1, 2, 3, 5, 7, 17, 29, 41, \ldots$.



Questo non è l'unico modo per costruire scale ben formate, ne esistono anche altri, ad esempio quello per toni interi utilizzato da Debussy. Tale scala è un esempio di scala ben formata *regolare*.

Osservazione 4.2. *La teoria di Carey e Clampitt delle scale ben formate riesce a descrivere soltanto scale costruite su quello che viene chiamato* temperamento pitagorico generalizzato. *Allo stato attuale non riesce a descrivere scale ben formate in un temperamento naturale di ordine* 5 *o superiore.*

4.5 Scale ME

Il termine *maximally even* (ME) fu introdotto da John Clough e Jack Douthett nell'articolo *Maximally even sets* (vedi [6]).

Diamo alcune definizioni preliminari necessarie per definire formalmente un insieme ME.

Definizione 4.11 (Cardinalità cromatica). *In un universo cromatico $\mathbb{Z}_N$ di N classi di altezze, N è detta* cardinalità cromatica.

Definizione 4.12 (Cardinalità diatonica). *Siano $N, d \in \mathbb{Z}$, con $d \leq N$, e $D_{N,d} = \{D_0, D_1, \ldots, D_{d-1}\} \subset \mathbb{Z}_N$, con $D_0 < D_1 < \cdots < D_{d-1}$. Allora $\{D_0, D_1, \ldots, D_{d-1}\} \subset \{0, 1, \ldots, N-1\}$ e d viene detta* cardinalità diatonica *di $D_{N,d}$.*

Scriveremo $D(N, d)$ per indicare l'insieme di tutti gli insiemi di parametri N e d.

Esempio 4.6. *$D_{12,7} = \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11\}$ rappresenta la scala diatonica di Do Maggiore.*

Il simbolo $D(12, 7)$ rappresenta, invece, l'insieme di tutti i sottoinsiemi di sette note della scala cromatica di 12 note.

Senza un insieme $D_{N,d}$ gli intervalli vengono misurati attraverso la *lunghezza cromatica* (clen) e dalla *lunghezza diatonica* (dlen). Il primo è dato dal numero di "semitoni cromatici" ascendenti da una classe di altezze all'altra, l'altro è il numero di "semitoni diatonici" ascendenti. Diamo le definizioni formali.

Definizione 4.13 (Lunghezza cromatica). *Siano $D_i, D_j \in D_{N,d}$. Si definisce* lunghezza cromatica *dell'intervallo (D_i, D_j), e si scrive $clen(D_i, D_j)$, il più piccolo intero non negativo congruente a $D_j - D_i \pmod N$.*

Definizione 4.14 (Lunghezza diatonica). *Siano $D_i, D_j \in D_{N,d}$. Si definisce* lunghezza diatonica *dell'intervallo (D_i, D_j), e si scrive $dlen(D_i, D_j)$, il più piccolo intero non negativo congruente a $j - i \pmod d$. Se $dlen(D_i, D_j) = 1$ l'intervallo è detto* tono *(step).*

Esempio 4.7. *Nell'insieme $\{D, F, G, B\} = \{2, 5, 7, 11\}$ ci sono 4 intervalli di lunghezza diatonica pari a 2: $(D, G), (F, B), (G, D)$ e (B, F). Questi quattro intervalli hanno lunghezza cromatica 5, 6, 7 e 6 rispettivamente.*

Definizione 4.15 (Spettro). *Si definisce* spettro *di una lunghezza diatonica l'insieme delle lunghezze cromatiche corrispondenti a una particolare lunghezza diatonica.*

Scriveremo $< I >= \{i_1, i_2, \ldots\}$ per indicare che lo spettro della lunghezza diatonica I è $\{i_1, i_2, \ldots\}$.

Esempio 4.8. *Nell'insieme di Do Maggiore abbiamo:*

$$< 1 >= \{1, 2\}$$
$$< 2 >= \{3, 4\}$$
$$< 3 >= \{5, 6\}$$
$$< 4 >= \{6, 7\}$$

Per insieme ME intuitivamente si intende l'insieme i cui elementi sono "il più uniformemente distribuiti nel cerchio cromatico". Introduciamo una metafora fisica per spiegare meglio tale concetto. Si possono immaginare 12 punti posti equidistanti lungo una circonferenza, come in un orologio, numerati consecutivamente da 0 a 11. Immaginiamo un'orbita di 4 elettroni. Inseriamo un elettrone nella posizione 0 e richiediamo che ognuno degli altri elettroni debba occupare una delle 11 posizioni rimanenti in modo tale che l'equilibrio di carica sia disturbato il meno possibile. Poiché 4 divide 12 c'è una sola soluzione: gli elettroni devono occupare le posizioni analoghe alle note di un accordo di settima diminuita: $0, 3, 6, 9$.

Ora supponiamo ci siano 7 elettroni invece che 4, uno dei quali occupi sempre la posizione 0. Poiché 7 non divide 12 vi è più di una soluzione; infatti sono 7, così come sono 7 gli insiemi diatonici che contengono una particolare classe di altezze. Se non richiediamo che uno degli elettroni sia nella posizione 0 allora abbiamo 12 soluzioni. Gli elettroni non sono distribuiti in modo uniforme ma, in vista della nostra richiesta di minimo disturbo sull'equilibrio di carica, possiamo dire che sono distribuiti nel modo più equo possibile. Quindi ha senso definire gli insiemi che rappresentano queste distribuzioni insiemi *maximally even* (ME). Diamo ora la definizione formale.

Definizione 4.16 (Scala ME)**.** *Una scala si dice* maximally even *(ME) se lo spettro di ogni lunghezza diatonica è rappresentato da un intero o da due interi consecutivi.*

Esempio 4.9. *Le scale maggiori sono ME, infatti ogni intervallo della scala si può presentare in due forme. Le scale minori armoniche, invece, non lo sono.*

Prendiamo in esame l'intervallo di seconda. A differenza della scala maggiore, in cui le seconde possono essere solo maggiori o minori (quindi di 2 tipi), nella scala minore ci possono essere tre tipi di seconde: minori, maggiori o aumentate.

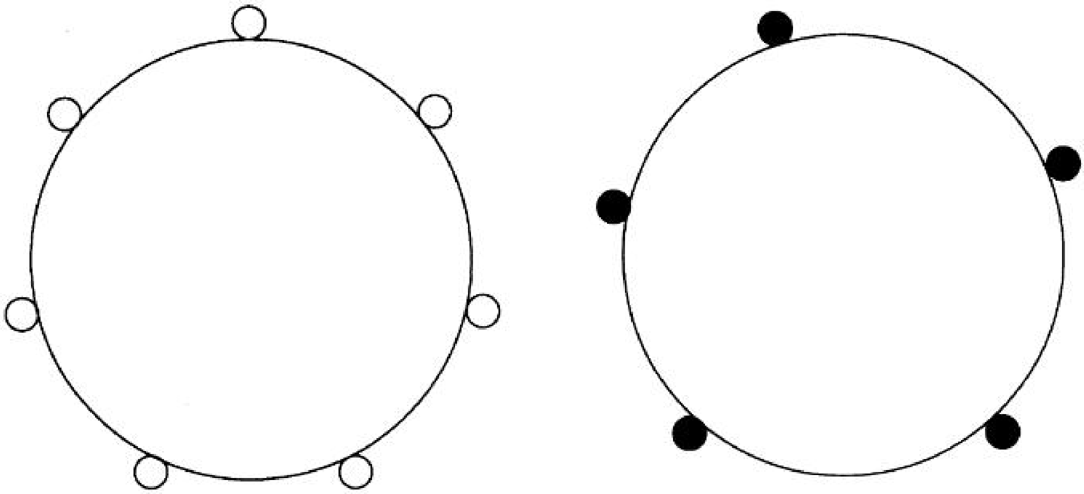
Indicheremo con $M_{N,d}$ il particolare insieme $D_{N,d}$ che è ME.

Esempio 4.10. *Consideriamo l'insieme di otto suoni $D_{12,8} = \{0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10\}$. Abbiamo i seguenti spettri:*

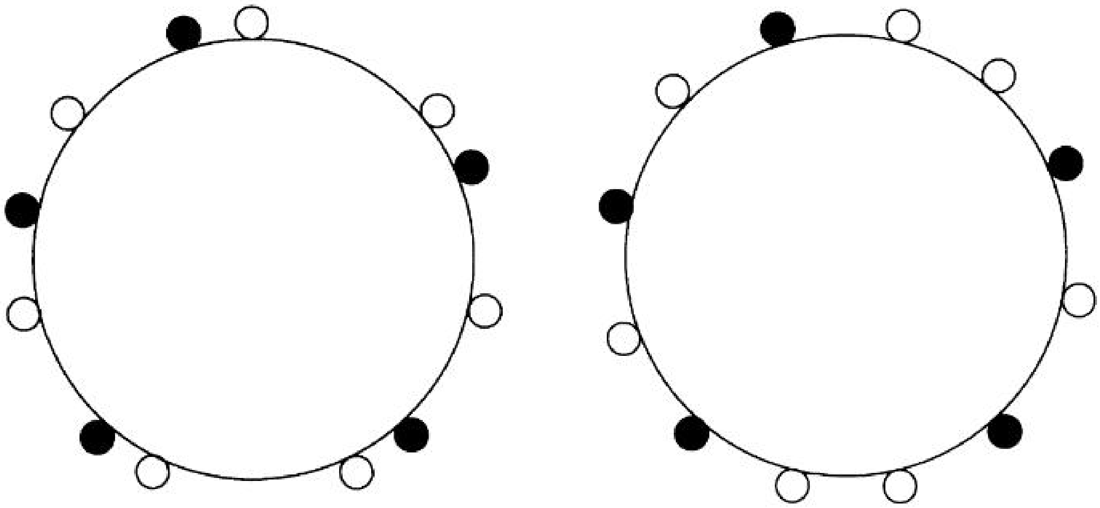
$$< 0 >= \{0\}$$
$$< 1 >= \{1, 2\}$$
$$< 2 >= \{3\}$$
$$< 3 >= \{4, 5\}$$
$$< 4 >= \{6\}$$
$$< 5 >= \{7, 8\}$$
$$< 6 >= \{9\}$$
$$< 7 >= \{10, 11\}$$

Poiché tutti gli spettri sono dati da singoli interi o da interi consecutivi l'insieme $D_{12,8}$ è ME, quindi possiamo scrivere $M_{12,8} = \{0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10\}$. In realtà ogni insieme di otto suoni è ME.

Esistono molti criteri geometrici per determinare scale ME, quello che presentiamo aiuta ad avere un'idea più concreta di cosa significhi distribuire note "il più uniformemente possibile". Per prima cosa scegliamo dei valori per N e d, ad esempio $N = 12$ e $d = 7$. Individuiamo i d punti bianchi equidistanti lungo la circonferenza di un cerchio, facciamo lo stesso per i $c - N$ punti neri in un altro cerchio (nel nostro caso $d - N = 5$).



Successivamente sovrapponiamo un cerchio sull'altro in modo che, presi due punti qualunque, questi non siano mai nella stessa posizione. Infine si assegna lunghezza diatonica pari a 1 per tutte le coppie di punti bianchi adiacenti e lunghezza cromatica 1 per tutte le coppie di punti adiacenti indipendentemente dal colore. Ora i punti bianchi rappresentano un insieme ME di parametri N e d, in questo caso $M_{12,7}$. I punti neri, invece, rappresentano un insieme ME complementare di parametri N e $N-d$, nel nostro caso $M_{12,5}$.



Inizialmente Clough, Myerson e subito dopo Douthett, osservarono tale informale nozione di "massima uniformità" nelle scale più famose: scala maggiore, pentatonica, scala per toni interi, ecc... Secondo Emmanuel Amiot, che nell'articolo *David Lewin and maximally even sets* pubblicato nel *Journal of Mathematics and Music (2007)*) si occupò di tali scale, ci sono ragioni musicologiche, e forse anche per difficoltà matematiche, per cui la loro definizione era piuttosto indiretta.

Prima di dare la definizione comune riformulata diamo la seguente:

Definizione 4.17. *La trasformata di Fourier di un insieme di classi di altezze $A \subset \mathbb{Z}_N$ è la* *trasformata di Fourier della sua funzione caratteristica:*

$$\mathcal{F}_A = \mathcal{F}(1_A) \colon t \mapsto \sum_{k \in A} e^{-2i\pi kt/N}$$

Definizione 4.18 (Scala ME)**.** *L'insieme di classi altezze $A \subset \mathbb{Z}_N$, con cardinalità d, è un insieme ME se il numero $|\mathcal{F}_A(d)|$ è massimale tra tutti gli insiemi di classi di altezze con cardinalità d, cioè $\forall A' \subset \mathbb{Z}_N$, con $|A'| = d$, si deve avere $|\mathcal{F}_A(d)| > |\mathcal{F}'_A(d)|$.*

4.6 Proprietà di Myhill e altre proprietà

Tra tutte le scale ME molto importanti sono quelle ME^*, le quali hanno la caratteristica di godere della proprietà di Myhill.

Definizione 4.19 (Proprietà di Myhill)**.** *Se tutti gli spettri di $D_{N,d}$ sono insiemi di due interi, eccetto $< 0 >= \{0\}$, si dice che $D_{N,d}$ gode della* proprietà di Myhill *(MP).*

Esempio 4.11. *La scala Maggiore è ME^* poiché ogni intervallo si può presentare in due forme: le seconde, le terze, le seste e le settime possono essere maggiori o minori; le quarte e le quinte possono essere giuste o aumentate.*

Osservazione 4.3. *Non tutte le scale ME possiedono tale proprietà, viceversa gli insiemi che possiedono tale proprietà in generale non sono sempre ME.*

Grazie alla proprietà di Myhill possiamo definire anche le scale ben formate *non-degeneri.*

Definizione 4.20 (Scale ben formate non-degeneri)**.** *Una scala ben formata si dice* non-degenere *se possiede la proprietà di Myhill.*

Osservazione 4.4. *L'usuale scala diatonica maggiore è una scala ben formata non-degenere.*

Vediamo ora alcune importanti proprietà degli insiemi ME.

Teorema 4.6.1. *Trasposizioni e inversioni di insiemi ME danno ancora luogo a insiemi ME.*

Teorema 4.6.2. *Il complementare di un insieme ME è un insieme ME.*

Dimostrazione. Per ogni sottoinsieme A di $\mathbb{Z}_N$ abbiamo:

$$|\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_N \setminus A}(N-d)| = |\mathcal{F}_{\mathbb{Z}_N \setminus A}(-d)| = |-\overline{\mathcal{F}_A(d)}| = |\mathcal{F}_A(d)|$$

Quindi A è ME se, e solo se, $\mathbb{Z}_N \setminus A$ lo è. $\square$

Teorema 4.6.3. *Siano $N, d \in \mathbb{Z}$ coprimi. Gli insiemi ME con d elementi sono generati da $f = d^{-1}$ (mod N), cioè*

$$A = fa + \{f, 2f, 3f, \dots, df\} \quad (mod\ N)$$

Dimostrazione. Poiché $(N, d) = 1$ allora $x \mapsto dx$ è bigettiva in $\mathbb{Z}_N$, quindi d ammette inverso moltiplicativo $f = d^{-1}$ (mod N). Ma

$$|\mathcal{F}_A(d)| = |\sum_{k \in A} e^{-2i\pi k \frac{d}{N}}| = |\mathcal{F}_{dA}(1)|$$

Quindi $|\mathcal{F}_A(d)|$ è massimo se e solo se $|\mathcal{F}_{dA}(1)|$ lo è, cioè significa che $dA \in \mathbb{Z}_N$ e $\exists a \in \mathbb{Z}_N, dA = a + \{1, 2, \dots, d\}$. □

Esempio 4.12. *La scala maggiore è generata da quinte giuste.*

Osservazione 4.5. *L'inversione $-A$ di un insieme ME A è ancora ME, quindi è possibile utilizzare il generatore $f' = -d^{-1}$.*

Quindi, ad esempio, la scala maggiore può essere generata anche da quarte.

Definizione 4.21. *Per ogni coppia (N, d) esiste una traslazione dell'insieme ME con d punti in $\mathbb{Z}_N$. D'ora in poi indicheremo tale classe di insiemi ME con $< N, d >$.*

Lemma 4.6.1. *Un generatore f' può essere usato per costruire sia insiemi ME $< N, d >$ che $< N, N - d >$.*

Esempio 4.13. *Supponiamo $N = 12$, la quinta $f' = f = 7$ genera sia la scala pentatonica che la scala maggiore.*

Teorema 4.6.4 (di Chopin). *Sia $1 < d \leq \frac{N}{2}$; allora ogni dato insieme ME $< N, N - d >$ contiene $N' - 2d' + 1$ insiemi ME $< N, d >$. Quindi, detto A^c il complementare di un insieme ME A, allora $A^c \subset A$ e anche le sue trasposizioni.*

Dimostrazione. Un insieme ME $< N, d >$ viene costruito troncando a d' i valori consecutivi della sequenza $\{f', 2f', \dots, (N' - d')f'\}$ (mod N'), il quale genera (sommando $N'\mathbb{Z}_N$) l'insieme ME $< N, N - d >$ A. Ciò può essere fatto $N' - 2d' + 1$ volte.

Da ciò, per il lemma precedente, è sufficiente aggiungere $c'\mathbb{Z}_N$ per ottenere entrambi gli insiemi, poiché N' è lo stesso per d e $N - d$, preservando la relazione di inclusione □

A tale enunciato è stato dato il nome di *teorema di Chopin* in riferimento allo studio n.5 Op.10 del compositore polacco, dove la mano destra suona solo i tasti neri (quindi una scala pentatonica) mentre la mano sinistra suona fra diversi tasti, per esempio Sol b e Re b.

Capitolo 5

La scala diatonica generalizzata

La generalizzazione della scala diatonica in un dato sistema di suoni è stata oggetto di studio di Eytan Agmon (1989 e 1991), John Clough (1979 e 1985) e, in relazione alla microtonalità, di Gerald Balzano e Mark Gould (2000). Dal 2002 al 2008 Franck Jedrzejewski ha sviluppato un nuovo modello di scala diatonica generalizzata basata su una nuova organizzazione dell'albero di Stern-Brocot: l'albero di Stern-Brocot riordinato. Con tale definizione recuperiamo la scala diatonica di Wyschnegradsky nell'universo dei quarti di tono.

Per arrivare alla versione riordinata dell'albero di Stern-Brocot partiamo dalla sua rappresentazione standard. Analizziamo la scala diatonica standard per mostrare il collegamento tra scala ben formata 5-generata (cioè generata da intervalli di quinta), un rapporto $\frac{4}{7}$ associato e una matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{N})$$

Il numeratore 4 del rapporto rappresenta il numero di toni e semitoni diatonici del generatore (la quinta), mentre il denominatore 7 rappresenta il numero di toni e semitoni diatonici nell'intervallo di ottava.

Le righe $(3, 1)$ e $(5, 2)$ della matrice A ci danno informazioni più precise sulla molteplicità di toni e semitoni: il generatore è formato da 3 toni e 1 semitono, mentre l'ottava è formata da 5 toni e 2 semitoni. Se x e y rappresentano le dimensioni di tono e semitono rispettivamente, possiamo esprimere ciò che è stato descritto attraverso un'equazione lineare

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2g - 1 \\ -5g + 3 \end{bmatrix}$$

La trasformazione del vettore iniziale $[g, 1]^T$ nel vettore di toni e semitoni $[x, y]^T$ porta una domanda di musica teorica. Il tono e il semitono si distinguono grazie a due proprietà: il tono è più "grande" e più frequente (si verifica 5 volte), mentre il semitono è più piccolo e raro (si verifica 2 volte). Ciò com'è collegato alla trasformazione appena vista? Nel prossimo paragrafo risponderemo a questa domanda in termini di albero di Stern-Brocot riordinato e trasformazioni associate.

Nel seguito della trattazione non utilizzeremo i termini "tono" e "semitono" ma parleremo più in generale di *step*[1].

[1] In Inglese il termine "tono" è detto "whole step", mentre "semitono" è detto "half step". Con il termine "step" si

Il passaggio all'albero di Stern-Brocot riordinato garantisce che la soluzione x rappresenta sempre lo step raro, mentre y rappresenta quello frequente.

5.1 L'albero di Stern-Brocot riordinato

Il grafo di Cayley di $SL(2,\mathbb{N}) =< T, S >$ generato liberamente dalle due matrici

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

può essere associato ad un albero di Stern-Brocot. Ricordiamo che ad ogni matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{N})$$

viene associata la frazione $\frac{a+b}{c+d}$. Tale rapporto è il valore $\mu_A(1)$ della trasformazione di Moebius associata ad A, valutata in $z = 1$.

Definizione 5.1 (Trasformazione di Moebius)**.** *Si definisce* trasformazione di Moebius *una trasformazione lineare del piano esteso* $\mathbb{C}^*$ *così definita*

$$\begin{aligned} \mu_A \colon \mathbb{C}^* &\to \mathbb{C}^* \\ z &\mapsto \mu_A(z) = \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

Per *albero di Stern-Brocot riordinato* si intende una diversa disposizione planare dell'albero di Stern-Brocot. Dato un nodo n, i suoi figli n_1 e n_2 sono gli stessi dell'albero originale, ma viene utilizzato un diverso criterio per la loro collocazione verso sinistra o verso destra. I 3 nodi più alti ($\frac{1}{1}, \frac{1}{2}$ e $\frac{2}{1}$) sono posti come nella struttura originale, per gli altri nodi si segue il seguente principio di riordinamento: nell'albero di Stern-Brocot originale se il successore n' di un nodo n viene raggiunto nella stessa direzione come n viene raggiunto dai suoi nodi precedenti, allora nell'albero di Stern-Brocot riordinato n' viene collocato nel lato inferiore sinistro di n, altrimenti in quello in basso a destra.

Vi è un grafo di Cayley di una matrice liberamente generata $< R, L > \subset GL(2,\mathbb{N})$ che corrisponde all'albero di Stern-Brocot riordinato nella stessa maniera in cui il grafo di Cayley di $SL(2,\mathbb{N})$ corrisponde all'albero originale. Le due matrici generatrici associate all'albero di Stern-Brocot riordinato sono

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = T \qquad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rimane da mostrare che queste matrici rappresentano lo stesso albero di Stern-Brocot e che il grafo di Cayley di $< R, L >$ realizza il principio di riordinamento per la sua diversa disposizione planare. Osserviamo che $R \notin SL(2,\mathbb{N})$ poiché $det(R) = -1$. Possiamo distinguere due casi.

1. Ogni matrice $A \in< R, L >$ con un numero pari di occorrenze di R nella sua generazione ha $det(A) = 1$ e appartiene a $SL(2,\mathbb{N})$, quindi appartiene anche a $< T, S >$ e, conseguentemente,

indica un generico intervallo tra due suoni consecutivi, che può essere quindi di tono o semitono.

è associato con lo stesso rapporto su entrambi gli alberi: l'albero di Stern-Brocot originale e quello riordinato.

2. Ogni matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in < R, L >$$

con un numero dispari di occorrenze di R nella sua generazione ha $det(A) = -1$ e troviamo che la matrice

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

con le colonne scambiate appartiene a $SL(2, \mathbb{N}) =< T, S >$. Le due trasformazioni di Moebius associate sono

$$\mu_A(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad \mu_{\tilde{A}}(z) = \frac{bz + a}{dz + c}$$

Tali trasformazioni sono diverse l'una dall'altra, tuttavia troviamo che per $z = 1$ coincidono:

$$\mu_A(1) = \mu_{\tilde{A}}(1)$$

Di conseguenza, A è associata allo stesso rapporto nell'albero di Stern-Brocot riordinato come lo è $\tilde{A}$ in quello originale.

Per ogni matrice $A \in < R, L >$ sia $\mathrm{card}_R(A)$ il numero di occorrenze di R nella sua generazione. Consideriamo la bigezione

$$\begin{aligned} \sigma \colon & < R, L > \to < T, S > \\ & A \to \sigma(A) = A \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{card}_R(A)} = \begin{cases} A & \text{per } A \in < R, L > \cap < T, S > \\ \tilde{A} & \text{per } A \in < R, L > \setminus < T, S > \end{cases} \end{aligned}$$

Tale applicazione manda $L = T$ in sé e R in $\tilde{R} = S$. Osserviamo che tale bigezione non è un omomorfismo. Le matrici L e R verificano la relazione

$$L^{-1}R = R^{-1}L$$

mentre le matrici S e T soddisfano la relazione

$$S^{-1}TS^{-1} = TS^{-1}T$$

Abbiamo bisogno di controllare la proprietà di riordinamento. Ogni elemento in $A \in < R, L >$ è rappresentato da una sua parola $w_1(A) \in \{R, L\}^*$ con lettere R e L, analogamente ogni elemento in $B \in < T, S >$ è rappresentato da una sua parola $w_2(B) \in \{S, T\}^*$ con lettere S e T. Sia

$$\begin{aligned} w_\sigma \colon & \{R, L\}^* \to \{S, T\}^* \\ & w_1(A) \to w_\sigma(w_1(A)) = w_2(\sigma(a)) \end{aligned}$$

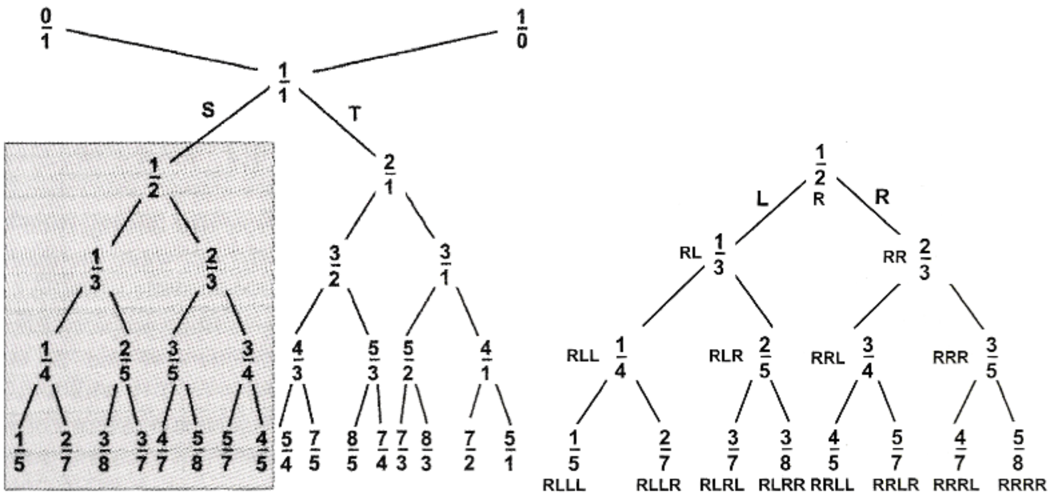


Figura 5.1: A sinistra l'albero di Stern-Brocot, a destra la parte sinistra della sua versione riordinata

l'espressione della bigezione σ in termini di parole. Dobbiamo dimostrare che ogni volta che in una parola $w_2(\sigma(A))$ una lettera nella posizione k ripete la sua precedente, allora la lettera associata alla posizione k in $w_1(A)$ è R.

Lo schema associato alla dimostrazione parte dall'osservazione secondo cui moltiplicando una matrice A per T da destra è lo stesso che aggiungere la colonna sinistra di A alla sua colonna destra. Invece, lasciando la colonna di destra inalterata, e moltiplicando una matrice A per S da destra è lo stesso che aggiungere alla colonna di destra di A la sua colonna di sinistra, lasciando inalterata la sua colonna di destra. Questo significa che, in entrambi i casi, una delle due colonne viene sostituita dalla somma delle due colonne, mentra l'altra rimane al suo posto. Comunque la moltiplicazione di una matrice A per R da destra è come la somma della colonna destra di A con la sua colonna sinistra, seguita da uno scambio di entrambe le colonne. Quindi, in entrambi i casi di moltiplicazione per $L = T$ o per R da destra, la somma delle due colonne finisce sul lato destro, mentre uno dei sue addendi rimane sul lato sinistro. Finché moltiplichiamo ripetutamente una matrice A per T, moltiplichiamo ripetutamente $\sigma^{-1}(A)$ per L. Una volta che cambiamo da T a S e quindi cambiamo il lato della "colonna somma" in $A \cdot S$ da destra a sinistra, abbiamo bisogno di moltiplicare $\sigma^{-1}(A)$ per R per mantenere la "colonna somma" sul lato destro. Se ora moltiplichiamo $A \cdot S$ con S, abbiamo bisogno di moltiplicare $\sigma^{-1}(A) \cdot R$ con L, perché semplicemente andiamo avanti ad aumentare il "lato sbagliato" della colonna somma. Solo se torna indietro a moltiplicarsi con T di nuovo abbiamo bisogno di applicare R per compensare la commutazione dei lati.

Come conseguenza della proprietà di riordinamento abbiamo la seguente caratterizzazione: la parola associata all'albero di Stern-Brocot ha per suffisso ST o TS. In entrambi i casi abbiamo uno scambio di lettere nell'ultima posizione. Quindi l'ultima lettera della parola associata all'albero di Stern-Brocot deve essere R. In altre parole, negli alberi di Stern-Brocot riordinati i numeri sono sempre successori destri.

I generatori delle scale, come la quinta $g = log_2(w)$ di solito sono scelti tra 0 e 1. Quindi è sufficiente controllare metà ala dell'albero di Stern-Brocot riordinato, quella che inizia con $R(1) = \frac{1}{2}$. Essa corrisponde all'ala sinistra dell'albero di Stern-Brocot riordinato in cui i razionali positivi di ogni linea orizzontale sono gli stessi ma in un altro ordine.

Esempio 5.1. *Consideriamo l'esempio iniziale. Il nodo $RRRL$ con la matrice*

$$A = RRRL = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

è associato alla trasformazione di Moebius

$$\mu_A(z) = \frac{x+3}{2x+5}$$

e $\mu_A(1) = \frac{4}{7}$. Per la quinta giusta $w = \frac{3}{2}$ con logaritmo $g = log_2\left(\frac{3}{2}\right)$, il cammino infinito nell'albero di Stern-Brocot comincia con $R^3LRLRL^2R^2L^4RL\ldots$ Il prefisso R^3L rappresenta la matrice A, quindi il numero razionale $\frac{4}{7}$ e codifica la scala diatonica. Stavolta la soluzione del sistema lineare vede x come "tono raro" e y come "tono frequente":

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \textit{con soluzione} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5w+3 \\ 2w-1 \end{bmatrix}$$

5.2 La scala diatonica generalizzata

Il contesto in cui si cerca di determinare la scala diatonica generalizzata in un dato universo cromatico di N suoni $\mathbb{Z}_N$ è quello delle grandi scale ME^*.

Definizione 5.2 (Scala ME^* grande)**.** *Sia $A \subset \mathbb{Z}_N$ una scala ME^*. Diremo che A è una* grande scala ME^* *se la sua cardinalità è maggiore della metà della cardinalità cromatica:*

$$|A| > \frac{N}{2}$$

Quindi gli steps di questa scala hanno dimensione cromatica 1 e 2.

I piccoli complementari di tali scale non hanno classi di altezze adiacenti. Viceversa, se il complementare A^c di una scala ben formata e non-degenere $A \subset \mathbb{Z}_N$ non ha classi di altezze adiacenti, possiamo concludere che A è ME con i toni di dimensione 1 e 2.

Proposizione 5.2.1. *Sia $A \subset \mathbb{Z}_N$ una scala ben formata e non-degenere di un universo cromatico $\mathbb{Z}_N$. Se A ha un complementare A^c senza classi di altezze adiacenti allora A è una grande scala ME^*.*

Dimostrazione. Oltre alla massima uniformità della scala degli steps astratti della scala A, poiché in A^c mancano classi di altezze adiacenti questo modello è interamente composto da dimensioni pari a 1 e 2. Da ciò ne deduciamo che A è ME e grande. Una scala ME può essere generata se il generatore m e la cardinalità cromatica N sono coprimi, quindi A deve essere una grande scala ME^*. □

Se pensiamo la grande scala ME^* A come i tasti bianchi di un pianoforte con una testiera uniforme, la proposizione si focalizza sul fatto che non ci sono tasti neri adiacenti l'uno all'altro. Quindi possiamo pensarla come una scala di soli tasti bianchi.

Esempio 5.2. *L'insieme $A = \{0, 1, 2, 3, \ldots, N-2\}$ è una banale scala di tasti bianchi 1-generata di $\mathbb{Z}_N$ e l'insieme $B = \{0, 2, 4, \ldots, 2k\}$ è una banale scala di tasti bianchi 2-generata in $\mathbb{Z}_{2k+1}$. Entrambi gli insiemi sono ben formati e non-degeneri. A^c si riduce ad una nota (un solo tasto bianco). $B^c = \{1, 3, 5, \ldots, 2k-1\}$, e neanche esso ha classi di altezze adiacenti.*

La seguente proposizione mostra che, in generale, ci sono scale ben formate, non-degeneri e m-generate che non sono grandi scale ME^* m-generate e mostra come sono collegate alle grandi scale ME^*.

Proposizione 5.2.2. *La cardinalità di una grande scala ME^* e m-generata in $\mathbb{Z}_N$ è massima tra tutte le scale ben formate, non-degeneri e m-generate di $\mathbb{Z}_N$.*

Dimostrazione. A differenti scale ben formate, non-degeneri e m-generate corrispondono differenti specifiche dimensioni degli steps. La Proposizione 5.2.1 implica che le dimensioni specifiche degli steps di una grande scala ME^* devono essere 1 e 2, ciò implica che la cardinalità deve essere massima. □

Esempio 5.3. *Nell'universo cromatico $\mathbb{Z}_{14}$ la scala $C = \{0, 1, 2, 5, 6, 7, 10, 11\}$ è una scala ben formata, non-degenere, 5-generata. Ma il complementare $\{3, 4, 8, 9, 12, 13\}$ ha classi di altezze adiacenti, quindi C non è una grande scala ME^*.*

Invece la scala $\{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12\}$ è una grande scala ME^*.

La seguente proposizione riassume una caratterizzazione delle grandi scale ME^* in relazione ai loro piccoli complementari ME^*.

Proposizione 5.2.3. *Una grande scala ME^* A in $\mathbb{Z}_N$ e il suo complementare A^c sono entrambi sottoinsiemi ME di $\mathbb{Z}_N$. A contiene una traslazione dei suoi complementari. Più precisamente, la traslazione $T_{-1} = x - 1$ di un grado sotto degli elementi di A^c è inclusa in A, cioé*

$$T_{-1}(A^c) \subset A$$

Dimostrazione. Poiché A è ben formata possiamo dedurre che il suo modello di intervallo di step è ME. Inoltre poiché le dimensioni dello step di A sono 1 e 2 possiamo dedurre che anche gli intervalli di step di A^c sono numeri adiacenti e che A e A^c sono entrambe scale ben formate e ME. Per il teorema di Chopin 4.6.4 sappiamo che una traslazione di A^c è contenuta in A, quindi il teorema è dimostrato. □

Definizione 5.3 (Scala strettamente generata)**.** *Una grande scala ME^* m-generata, con $m \geq 2$, si dice* strettamente generata *se non esiste una scala ben formata, non-degenere e m-generata tale che:*

$$T_{-1}(A^c) \subset W \subset A$$

Prima di investigare ulteriormente su questa proprietà introduciamo un'altra definizione, la quale fornisce una risposta alla domanda iniziale "esiste una scala analoga alla scala diatonica standard in un sistema cromatico di N note anziché 12?".

Definizione 5.4 (Scala diatonica generalizzata)**.** *In un universo cromatico $\mathbb{Z}_N$, con $N \geq 12$ e $N \neq 15$, si definisce* scala diatonica generalizzata *una grande scala ME^* strettamente m-generata (con generatore $m > 2$) tale che sia minima la differenza $|A| - |A^c|$ tra tutte le grandi scale ME^* strettamente generate.*

La condizione $m > 2$ tiene conto del fatto che per una cardinalità cromatica N dispari esiste sempre una scala diatonica generalizzata 2-generata banale $A = \{0, 2, 4, \ldots, N - 1\}$ di cardinalità $|A| = \frac{N+1}{2}$, tale per cui $|A| - |A^c| = 1$.

Eytan Agmon scartò queste scale, mente John Clough e Jack Douthett riconobbero la loro importanza nella costruzione di insiemi ME del secondo ordine. La definizione 5.4 presuppone quindi l'esistenza di grandi scale ME^* strettamente generate con generatore $m > 2$. Osserviamo che tale definizione vale per $N \geq 12$ e $N \neq 15$. Dimostreremo una congettura secondo la quale al di là di questo esempio esiste sempre una scala diatonica generalizzata non banale.

Esempio 5.4. *Per $N = 12$ la tradizionale scala diatonica $A = \{0, 1, 3, 5, 6, 8, 10\}$ è una grande scala ME^* 5-generata o (7-generata). Il suo insieme complementare è la tradizionale scala pentatonica ed è una traslazione della scala 5-generata $\{0, 3, 5, 8, 10\} \subset A$, che è una piccola scala ME^*. Il solo insieme 5-generato $\{0, 1, 3, 5, 8, 10\}$ tra A e A^c non è ben formato.*

Esempio 5.5. *La scala cromatica di 19 suoni può essere vista come versione temperata del* Cembalo Cromatico*, ed è interessante osservare che il banale grande complementare ME^* 8-generato di 12 suoni $\{0, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 13, 15, 16, 18\}$ della piccola scala ME^* $\{1, 3, 6, 9, 11, 14, 17\}$ - il quale è come la scala di tasti neri in $\mathbb{Z}_{19}$ che corrisponde alla tradizionale scala diatonica - non è la generalizzazione della scala diatonica in $\mathbb{Z}_{19}$. Invece è la scala 7-generata $\{0, 2, 4, 6, 7, 9, 11, 13, 14, 16, 18\}$ di cardinalità 11.*

5.3 La scala diatonica generalizzata e gli alberi di Stern-Brocot

Le seguenti definizioni e proposizioni dimostrano i vantaggi dell'utilizzo degli alberi di Stern-Brocot per lo studio delle grandi scale ME^*. Abbiamo già visto che il rapporto $\frac{4}{7}$ e la matrice

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{N})$$

possono essere associati alla scala diatonica standard. Nel paragrafo 5.1 abbiamo sostituito questa matrice con la sua versione riordinata

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \in < R, L >$$

Ricordiamo che il rapporto $\frac{4}{7}$ è una caratterizzazione *generica* della scala diatonica: il numeratore 4 rappresenta il numero di toni e semitoni nella quinta, mentre il denominatore 7 rappresenta il numero di toni e semitoni nell'ottava. Le righe $(3, 1)$ e $(5, 2)$ della matrice forniscono informazioni sulla molteplicità di toni e semitoni: la quinta è formata da 3 toni e 1 semitono, mentre l'ottava contiene 5 toni e 2 semitoni. Tale caratterizzazione non ci dà informazioni sull'ampiezza degli steps.

In questo paragrafo mostreremo che per scale m-generate l'ampiezza diventa stretta quando lo step frequente è anche il più grande, cioè di dimensione 2. Da questa situazione concreta della scala diatonica possiamo indagare la gerarchia di descrizioni generiche di scale ben-formate con l'aiuto della corrispondenza uno-a-uno tra i rapporti dell'albero di Stern-Brocot riordinato, le matrici in $< R, L >$ e le descrizioni di scale generiche.

Definizione 5.5. *Sia $d = |A|$ la cardinalità di una scala ben formata A e sia $1 \leq b < |A|$ un numero coprimo con d. Sia*

$$G_{b/d} = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b - b_0 & b_0 \\ d - d_0 & d_0 \end{bmatrix} \in < R, L >$$

la matrice associata ad un albero di Stern-Brocot riordinato con rapporto b/d. b rappresenta il numero di steps nell'intervallo generatore, d quello nell'intervallo di ottava. b_0 e a_0 indicano i numeri di volte in cui avvengono frequenza e steps rari nell'intervallo generatore rispettivamente; d_0 e c_0 invece quelli nell'intervallo di ottava.

Ora introduciamo a questa generica interpretazione una specifica corrispondenza uno-a-uno tra rapporti, matrici e determinate scale m-generate.

Definizione 5.6. *Sia N la cardinalità di un sistema cromatico $\mathbb{Z}_N$ e $1 \leq m < N$ un numero coprimo con N. Sia*

$$A_{m/N} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m - b & b \\ N - d & d \end{bmatrix} \in < R, L >$$

la matrice associata ad un albero di Stern-Brocot riordinato con rapporto m/N e sia $A_{m/N} = \{km | k = 0, \ldots, d-1\}$ la scala m-generata associata di cardinalità d.

La seguente proposizione conferma che questa associazione offre una corrispondenza uno-a-uno tra rapporti, matrici e grandi scale ME^*. Inoltre offre un collegamento tra interpretazioni generiche di rapporti nel senso della definizione 5.5 e specifiche interpretazioni di rapporti nel senso della definizione 5.6.

Proposizione 5.3.1. *Ogni scala m-generata della forma $A_{m/N}$ in $\mathbb{Z}_N$ è una grande scala ME^* e ogni grande scala ME^* in $\mathbb{Z}_N$ è della forma $A_{m/N}$, quindi corrisponde ad un nodo m/N nell'albero di Stern-Brocot riordinato. La generica descrizione di una grande scala ME^* $A_{m/N}$ corrisponde all'immediato predecessore b/d del nodo m/N nell'albero di Stern-Brocot riordinato.*

Dimostrazione. Il predecessore del rapporto m/N nell'albero di Stern-Brocot riordinato è il rapporto b/d associato alla matrice

$$G_{b/d} = \begin{bmatrix} b - b_0 & b_0 \\ d - d_0 & d_0 \end{bmatrix}$$

A seconda che $A_{m/N}$ sia un successore sinistro o destro di $G_{b/d}$ dobbiamo distinguere due casi:

$$G_{b/d} \cdot L = \begin{bmatrix} b - b_0 & b_0 \\ d - d_0 & d_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b - b_0 & b \\ d - d_0 & d \end{bmatrix} = A_{(2b-b_0)/(2d-d_0)}$$
$$G_{b/d} \cdot R = \begin{bmatrix} b - b_0 & b_0 \\ d - d_0 & d_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & b \\ d_0 & d \end{bmatrix} = A_{(b+b_0)/(d+d_0)}$$

Per entrambi i casi calcoliamo le specifiche dimensioni degli steps della scala $A_{m/N}$ applicando la matrice inversa $G_{b/d}^{-1}$ al vettore $\begin{bmatrix} m & N \end{bmatrix}^T$

$$G_{b/d}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2b-b_0 & b_0 \\ 2d-d_0 & d_0 \end{bmatrix} = (-1)^r \begin{bmatrix} d_0 & -b_0 \\ -d+d_0 & b-b_0 \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2b-b_0 & b \\ 2d-d_0 & d \end{bmatrix} = (-1)^r (bd_0 - b_0 d) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$G_{b/d}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b+b_0 \\ d+d_0 \end{bmatrix} = (-1)^r \begin{bmatrix} d_0 & -b_0 \\ -d+d_0 & b-b_0 \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b+b_0 \\ d+d_0 \end{bmatrix} = (-1)^r (bd_0 - b_0 d) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Questo mostra che tutte le scale della forma $A_{m/N}$ sono scale ben formate e degeneri con dimensione specifica dello step 1 e 2, quindi sono grandi scale ME^*. Viceversa, se abbiamo una grande scala ME^*, la cui descrizione generica è data dalla matrice $G_{b/d}$, possiamo applicare questa matrice a ai vettori $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ e $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ rispettivamente per ottenere

$$G_{b/d} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-b_0 & b_0 \\ d-d_0 & d_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b-b_0 \\ 2d-d_0 \end{bmatrix}$$
$$G_{b/d} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-b_0 & b_0 \\ d-d_0 & d_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+b_0 \\ d+d_0 \end{bmatrix}$$

I vettori risultanti descrivono esattamente la dimensione cromatica dell'intervallo generatore e dell'intervallo di ottava per la scala $A_{(2b-b_0)/(2d-d_0)}$ e $A_{b+b_0)/(d+d_0)}$, e ciò completa la dimostrazione. □

Nel caso della scala diatonica standard, che è caratterizzata genericamente da

$$G_{4/7} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

si trova $G_{4/5} \cdot L = A_{5/9}$ e $G_{4/5} \cdot R = A_{7/12}$. La scala diatonica di 7 suoni $A_{7/12} = \{0, 2, 4, 6, 7, 9, 11\}$ in $\mathbb{Z}_{12}$ è strettamente generata, mentre la grande scala ME^* 5-generata $A_{5/9} = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ in $\mathbb{Z}_9$ non lo è. $A_{5/9}$ contiene la traslazione $\{0, 5\}$ del complementare ben formato non-degenere $\{8, 4\}$ con dimensione di step 4 e 5. E tra $\{0, 5\}$ e $\{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ c'è la scala ben formata, non-degenere, 5-generata $\{0, 1, 2, 5, 6\}$ con step di dimensioni 1 e 3.

Dimostriamo ora che questa divisione binaria in un caso strettamente generato e in uno non strettamente generato esemplifica il caso generale, cioè la distribuzione binaria di grandi scale ME^* (al variare di m) tra le strutture ad albero binarie di alberi di Stern-Brocot riordinati.

Proposizione 5.3.2. *Siano $A_{m_1/N_1} = G_{b/d} \cdot L$ e $A_{m_2/N_2} = G_{b/d} \cdot R$ i successori destro e sinistro della matrice $G_{b/d}$ nel grafo di Cayley binario di $< R, L >$. La grande scala ME^* m_2-generata A_{m_2/N_2} in $\mathbb{Z}_{N_2}$ è strettamente generata, mentre la grande scala ME^* m_1-generata A_{m_1/N_1} in $\mathbb{Z}_{N_1}$ non lo è. Nel caso strettamente generato, lo step più grande di dimensione 2 compare più frequentemente di quello più piccolo di dimensione 1.*

Dimostrazione. Sia

$$G_{b/d} = \begin{bmatrix} b-b_0 & b_0 \\ d-d_0 & d_0 \end{bmatrix}$$

un elemento di $< R, L >$. Sappiamo che $b - b_0 < b_0$ e $d - d_0 < d_0$. Ciò implica che la cardinalità cromatica $N_1 = (d - d_0) + d$ è più piccola della cardinalità cromatica $N_2 = d_0 + d$. Ciò implica anche che il numero $d - d_0$ di steps di dimensione 2 in A_{m_1/N_1} è più piccolo del numero d_0 di steps di dimensione 2 in A_{m_2/N_2}.

Per compleare la dimostrazione rimane da mostrare che il successore destro corrisponde ad una scala strettamente generata, mentre quello sinistro non lo è. Il punto cruciale è la cardinalità dei complementari $A^c_{m_1/N_1} = \mathbb{Z}_{N_1} \setminus A_{m_1/N_1}$ e $A^c_{m_2/N_2} = \mathbb{Z}_{N_2} \setminus A_{m_2/N_2}$ coincidono con le frequenze $d - d_0$ e d_0 degli steps di dimensioni 1 e 2 in A_{m_1/N_1} e A_{m_2/N_2} rispettivamente. Questo è semplice perché in ogni intervallo di dimensione 2 vi è un tasto nero - un elemento del complementare.

Il predecessore del rapporto b/d di un albero di Stern-Brocot riordinato è b_0/d_0. Di conseguenza, b_0/d_0 è un semi-convergente dei rapporti m_1/N_1 e m_2/N_2. In accordo con la teoria delle scale ben formate, possiamo concludere che la scala m_1-generata $B_1 = \{km_1 | k = 0, \ldots, d_0 - 1\}$ di cardinalità d_0 in $\mathbb{Z}_{N_1}$ è una scala ben formata e non-degenere.Allo stesso modo, la scala m_2-generata $B_2 = \{km_2 | k = 0, \ldots, d_0 - 1\}$ di cardinalità d_0 in $\mathbb{Z}_{N_1}$ è una scala ben formata e non-degenere. Anche il complementare di A_{m_2/N_2} ha cardinalità d_0, quindi è una traslazione di $A^c_{m_2/N_2}$. Ma d_0 è maggiore della cardinalità $d - d_0$ del complementare di A_{m_1/N_1}. Quindi, da un lato abbiamo l'inclusione propria $T_{-1}(A^c_{m_1/N_1} \subset B_1 \subset A_{m_1/N_1}$, che mostra che il successore sinistro $A_{m_1/N_1} = G_{b/d} \cdot L$ è associato ad una scala non strettamente generata. Dall'altra parte, l'inclusione propria $T_{-1}(A^c_{m_2/N_2}) = B_2 \subset B'_2 \subset A_{m_2/N_2}$ di scale ben formate dovrebbe implicare che c'è un intermedio semi-convergente del rapporto m_2/N_2 tra b_0/d_0 e d/b. Ma non esiste un intermedio semi-convergente, quindi il successore destro $A_{m_2/N_2} = G_{b/d}$ è associato a una scala strettamente generata. □

Esempio 5.6. *Per $N = 13$ il numero $m/N = 5/13$ è associato alla parola RLR^3 e alla matrice*

$$U = RLR^3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Il predecessore nell'albero di Stern-Brocot riordinato è $3/8$, ed è associato alla parola RLR^2 e alla matrice

$$V = RLR^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

La scala diatonica generalizzata A è una grande scala ME^* 5-generata $A = \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12\}$. La sua complementare è, a meno di traslazioni, la scala $B = \{0, 2, 5, 7, 10\}$. Non ci sono scale ben formate tra A e B. La scala A è strettamente generata. La parola RLR^3 associata a m/N finisce con R. La prima colonna della matrice U è uguale alla seconda colonna di V. Invece consideriamo ora il numero $m/N = 3/13$, la parola associata è RL^3RL. Tale numero è associato alle matrici

$$U = RL^3RL = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Il predecessore nell'albero di Stern-Brocot riordinato è $3/8$, ed è associato alla parola RLR^2 e alla matrice

$$V = RL^3R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

La grande scala ME^* 3-generata $A = \{0, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12\}$ non è strettamente generata. La sua complementare è, a meno di traslazioni, $A^c = \{0, 3, 6, 9\}$. La scala $B = \{0, 3, 6, 9, 12\}$ è una scala ben formata 3-generata tra A e A^c. La parola associata RL^3RL non finisce per R. La prima colonna della matrice U non è uguale alla seconda colonna di V.

Come già anticipato nel caso particolare $N = 15$, l'esistenza di scale diatoniche generalizzate non banali non è garantita per cardinalità dispari di N. Comunque, sulla base di esperimenti con computer possiamo formulare la seguente congettuta.

Congettura 5.3.1. *In ogni universo N-cromatico $\mathbb{Z}_N$, $N \geq 12$, $N \neq 15$, esiste esattamente una scala diatonica generalizzata. In altre parole, ogni numero naturale $N \geq 12$, $N \neq 15$ è il denominatore di un numero cromatico m/N con $m > 2$.*

5.4 Scale iperdiatoniche generalizzate

C'è un altro interessante aspetto strutturale delle scale diatoniche che è stato studiato anche nel contesto della loro generalizzazione. La scala diatonica di 12 suoni contiene un tritono, che incarna un'ambiguità tra la quarta aumentata e la quinta diminuita. Il tritono come insieme di due suoni è invariante sotto la trasposizione T_6 è quindi un esempio insieme a trasposizione limitata in $\mathbb{Z}_{12}$. L'insieme a trasposizioni limitate gioca un ruolo importante nella teoria della musica dei sistemi di 12 suoni, che comprende lo studio delle scale. Olivier Messiaen dedicò indagini ampiamente riconosciute sugli insiemi a trasposizioni limitate dopo che li esplorò dal punto di vista compositivo nei sui *Preludi* per pianoforte del 1929. Nell'armonia tonale è noto che l'accordo di settima diminuita collega diversi tasti maggiori e minori e offre diversi modi per modulare. Questo accordo contiene due tritoni ed è un insieme a trasposizioni limitate. Comunque, il più piccolo insieme a trasposizioni limitate è il tritono, che è sempre incluso nella scala diatonica[2].

In un universo N-cromatico è interessante vedere se la scala diatonica generalizzata ha un sottoinsieme a trasposizioni limitate. A questo punto possiamo generalizzare anche il concetto di scala iperdiatonica.

Definizione 5.7 (Scala iperdiatonica)**.** *Una scala diatonica generalizzata $A \subset \mathbb{Z}_N$ è una scala iperdiatonica se contiene un sottoinsieme non banale di trasposizioni limitate $L \subset \mathbb{Z}_N$ di cardinalità la più piccola possibile nell'universo N-cromatico.*

Se $N = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$ è la scomposizione in fattori primi di N, i sottoinsiemi di trasposizioni limitate di cardinalità più piccola possibile in un universo N-cromatico sono esattamente le traslazioni dell'insieme $(N/p_1)\mathbb{Z}_N$. Quando $N = p_1$ è primo, la scala diatonica generalizzata non è una scala iperdiatonica nel senso della definizione 5.7 perché il solo insieme di trasposizioni limitate è l'intero sistema cromatico $\mathbb{Z}_N$. Esistono anche cardinalità cromatiche che non sono numeri primi, le cui scale diatoniche generalizzate non sono iperdiatoniche. Per $N = 21$ la scala diatonica generalizzata $\{0, 1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19\}$ è una scala diatonica 8-generata senza alcun insieme di trasposizioni limitate.

La definizione 5.7 non postula l'unicità dei sottoinsiemi a trasposizioni limitate, tale che le scale iperdiatoniche possono contenere certi grandi sottoinsiemi a trasposizioni limitate. Per $N = 14$ la scala diatonica generalizzata $\{0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12\}$ è 3-diatonica e contiene l'insieme di trasposizioni limitate $\{0, 3, 7, 10\}$ che include il più piccolo insieme di trasposizioni limitate $\{0, 7\}$.

[2]Anche la scala minore armonica contiene due tritoni.

5.5 Il cromatismo diatonicizzato di Wyschnegradsky

Nella *Prefazione* dei suoi *Preludi*[3], op. 22, composta nel 1916, Ivan Wyschnegradsky[4] definì cosa si intende per scala diatonica in un sistema di quarti di tono:

"Strutturalmente il lavoro si basa su una scala non simmetrica formata da 13 *toni, simile alla tradizionale scala diatonica. Essa comprende due tetracordi separati da due unità intervallari (cioè due semitoni). Allo stesso modo, la scala di* 13 *toni comprende due accordi di settima, anch'essi separati da due unità intervallari. Ma dal momento che l'unità intervallare in questo caso è il quarto di tono, la distanza tra due settime sarà di un semitono."*

Il compositore russo confrontò le due scale e discusse sulle analogie fra la scala diatonica standard di 7 toni e quella di 13 toni:

"Entrambe le scale possono essere espresse in termini di circolo delle quarte o delle quinte. Nella vecchia scala abbiamo 6 *quarte giuste o quinte giuste che comprendono metà del cerchio completo formato da* 12 *quarte o* 12 *quinte. Nella nuova scala, invece, abbiamo* 12 *quarte maggiori o* 12 *quinte minori che comprendono metà del cerchio completo, stavolta formato non da* 12 *ma da* 24 *quarte maggiori o* 24 *quinte minori. È importante ricordare ciò poiché sia la quarta maggiore (*11 *quarti di tono = una quarta giusta più un quarto di tono) e la quinta minore (*13 *quarti di tono = una quinta giusta meno un quarto di tono), che sono le basi strutturali del diatonicismo di* 13 *toni, non sono meri risultati accidentali di una divisione dell'ottava in parti disuguali, ma sono intervalli naturali. I rapporti delle loro frequenze sono:* $\frac{11}{8}$ *per la quarta maggiore,* $\frac{16}{11}$ *per la quinta minore. Osserviamo che il numero* 11*, assente in ogni rapporto tonale noto in musica sino ad ora, è presente in entrambi gli intervalli, così come in altri intervalli di quarti di tono."*

La scala di 13 toni può essere trasposta su ognuno dei 24 gradi della scala di quarti di tono. La prima trasposizione è detta "Posizione Do".

Ogni preludio dell'op. 22 è scritto in diverse posizioni. Il primo preludio usa la posizione C, mentre il terzo è in posizione B. Osserviamo inoltre che questa scala non può essere trasposta nel sistema di 12 toni.

La scala cromatica diatonicizzata di Wyschnegradsky è un esempio di scala iperdiatonica. In particolare appartiene alla famiglia di scale diatoniche generalizzate in un universo cromatico di N suoni, con N divisibile per 4. Gli studi di Wyschnegradsky, che furono pubblicati nel 1979, ma le cui origini risalgono al 1916, possono essere considerati come predecessori delle indagini successive di Agmon, Clough, Douthett e Jedrzejewski.

Possiamo riassumere le principali proprietà nel seguente teorema.

Teorema 5.5.1. *Sia* $k \in \mathbb{Z}^+$, $k \geq 2$. *La scala diatonica generalizzata nel sistema cromatico di* $N = 4k + 4$ *toni è*

$$W_k = \{0, 1, 3, 5, \ldots, 2k + 1, 2k + 2, 2k + 4, \ldots, 4k + 2\}$$

[3]Si tratta dei *24 Preludi in tutte le tonalità della scala cromatica diatonicizzata di 13 suoni*, preludi per due pianoforti in quarti di tono.

[4]Ivan Wyschnegradsky (1893-1979) è un compositore russo noto soprattutto per le sue composizioni microtonali e la sua scala composta da quarti di tono.

Questa scala ha $|W - k| = 2k+3$ toni ed è generata da $m = 2k+1$. Lo step modello contiene esattamente due semitoni di dimensione cromatica 1. Tutti gli altri steps hanno dimensione cromatica 2. I tre numeri N, m w $|W_k$ soddisfano l'equazione

$$N = m + |W - k| = 4k + 4$$

La scala W_k è una scala iperdiatonica che contiene l'insieme a trasposizione limitata $\{0, 2k+2\}$.

Dimostrazione. Consideriamo i multipli di $2k + 1$ in modulo $4k + 4$ separando quelli dispari da quelli pari:

$$\begin{aligned} 0(2k+1) &= 0 & 1(2k+1) &= (2k+2) - 1 \\ 2(2k+1) &= -2 & 3(2k+1) &= (2k+2) - 3 \\ &\vdots & &\vdots \\ 2k(2k+1) &= 2k+4 & (2k+1)(2k+1) &= 1 \\ (2k+2)(2k+1) &= 2k+2 & & \end{aligned}$$

Tale calcolo mostra che l'elemento $2k + 3$ della scala $2k + 1$-generata è esattamente W_k. Ciò dimostra anche che lo step modello è quello descritto nell'enunciato del teorema. I semitoni sono distribuiti nel modo più uniforme possibile (maximally evenly distributed), perché sono interrotti da k steps tra 1 e $2k+1$ e $k+1$ steps tra $2k+2$ e $4k+4 = 0$. Quindi W_k è una grande scala ME^*. È strettamente generata poiché lo step piccolo è anche lo step raro. La differenza tra la cardinalità di W_k e il suo complementare

$$|W_k| - |W_k^c| = 2k + 3 - [4k + 4 - (2k - 3)] = 2$$

non può essere superata. Quindi W_k è una scala diatonica generalizzata in $\mathbb{Z}_{4k+4}$, in particolare è una scala iperdiatonica. □

Bibliografia

[1] AA. VV., Enciclopedia della musica, *Le Garzantine*, Garzanti libri, gennaio 1999.

[2] Apreda, *Fondamenti teorici dell'arte musicale moderna*, Milano, Casa Ricordi, 1999.

[3] D. Benson, *Music: a mathematical offering*, University of Arbedeen, Department of Mathematics, 2007.

[4] N. Carey, D. Clampitt, *Aspects of well-formed scalesMusic Theory Spectrum*, n.11, 1989.

[5] C. Casolo, *Gruppi e Grafi Expander - Corso di complementi di Algebra*, 2006-2007.

[6] J. Clough. J. Douthett, *Maximally even sets*, Journal of Music Theory, n.35, 1991.

[7] T. M. Fiore, *What is Mathematical Music Theory?* (`http://www-personal.umd.umich.edu/~tmfiore/1/FioreWhatIsMathMusTheoryBasicSlides.pdf`).

[8] F. Jedrzejewski, *Generalized diatonic scale*, Journal of Mathematics and Music, Vol. 2 (1), marzo 2008.

[9] F. Jedrzejewski, *Pseudo-diatonic scale*, Mathematics and Computation in Music - Communications in Computer and Information Science, Vol. 37, 2009, pp 493-498.

[10] A. Koss, *A comparison of the graphs of the chromatic and diatonic scale.*

[11] S. Isola, *Temperamenti: matematica e teoria musicale*, (`http://www.unicam.it/`).

[12] S. Pasticci, *Teoria degli insiemi e analisi della musica post-tonale*, volume monografico della "Rivista di Analisi e Teoria musicale", n.1, Bologna, 1985.

[13] W. Piston, *Armonia*, Torino, E.D.T. (I Manuali (EDT/SIdM)), 1989.

[14] R. Wells Hall, *The Sound of Numbers - A tour of Mathematical Music Theory* (`http://people.sju.edu/~rhall/proposal.pdf`).