



Università degli Studi di Cagliari

Facoltà di Scienze

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Due esempi di insiemi non misurabili secondo Lebesgue

Relatore:

Prof. Lucio Cadeddu

Tesi di:

Valentina Bussu

Anno Accademico 2016-2017

Indice

Introduzione	2
1 Teoria della Misura	4
1.1 Misura degli insiemi limitati	4
1.1.1 Intervalli e plurintervalli	4
1.1.2 Insiemi aperti e chiusi	6
1.1.3 Insiemi di tipo qualunque	7
1.2 Proprietà della misura degli insiemi limitati	8
1.3 Insiemi non limitati	14
2 Insiemi non misurabili	15
2.1 Giuseppe Vitali: biografia	15
2.2 Insieme di Vitali: un primo esempio di insieme non misurabile	17
2.2.1 Costruzione di un insieme non misurabile	20
2.3 Un'applicazione del Teorema di Vitali	23
3 Un sottoinsieme non misurabile del toro \mathbb{T}^2	26
3.1 Il toro \mathbb{T}^2	26
3.2 Sottogruppo a un parametro del toro \mathbb{T}^2	28
3.3 Costruzione di un sottoinsieme non misurabile del toro \mathbb{T}^2 . .	31

Introduzione

In questa tesi verranno descritti due esempi di sottoinsiemi dello spazio euclideo \mathbb{R}^n , non misurabili secondo Lebesgue.

La misura secondo Lebesgue rappresenta un'estensione della misura secondo Peano-Jordan, essa infatti permette di generalizzare e completare alcune proprietà riguardanti la misura dei sottoinsiemi di \mathbb{R}^n .

Nonostante la classe degli insiemi misurabili sia molto vasta, se si considera l'Assioma di Scelta, è possibile costruire degli esempi che provano che non tutti gli insiemi di \mathbb{R}^n sono misurabili secondo Lebesgue.

Un primo esempio di insieme di numeri reali non misurabile secondo Lebesgue è stato costruito da Giuseppe Vitali nel 1905. Nella costruzione del matematico italiano gioca un ruolo fondamentale la proprietà di invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue.

Alcuni anni dopo, parecchi matematici scoprirono alcuni di questi insiemi e in tutte le loro costruzioni viene utilizzato l'Assioma di Scelta, il quale è indispensabile nella costruzione di un insieme non misurabile di numeri reali.

La tesi è suddivisa nei tre seguenti capitoli:

- Il primo capitolo è rivolto all'esposizione dei risultati della teoria della misura secondo Lebesgue, verranno mostrate le principali definizioni e proprietà di cui essa gode;
- Il secondo capitolo è invece interamente dedicato al matematico italiano Vitali. In esso sarà presentata la sua biografia e il suo principale

teorema, il quale fornisce un primo esempio di sottoinsieme di \mathbb{R} non misurabile;

- Per concludere, nel terzo capitolo verrà descritto un sottoinsieme non misurabile del toro $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$, la cui costruzione risulta essere una generalizzazione del risultato ottenuto da Vitali.

Capitolo 1

Teoria della Misura

1.1 Misura degli insiemi limitati

In questo capitolo verrà descritta la misura secondo Lebesgue di un generico sottoinsieme limitato di \mathbb{R}^n . Partiremo dagli insiemi geometricamente più semplici (gli n -intervalli) e poi generalizzeremo la trattazione per descrivere gli insiemi di tipo qualsiasi.

La misura di un generico insieme E di \mathbb{R}^n verrà indicata con il simbolo $|E|$.¹

1.1.1 Intervalli e plurintervalli

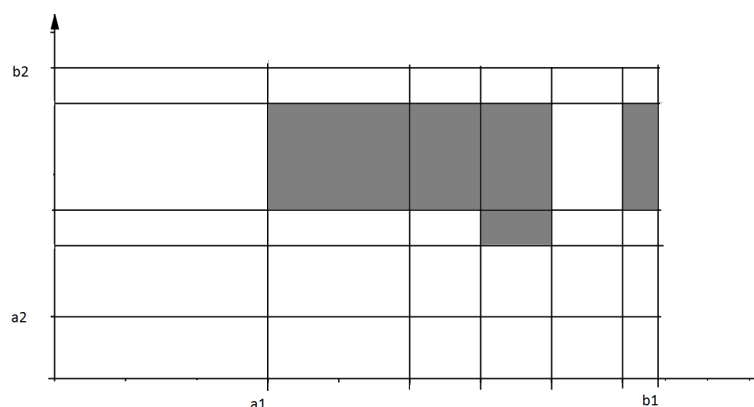
Dato Q un intervallo limitato di \mathbb{R}^n , ossia il prodotto cartesiano di n intervalli di \mathbb{R} :

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

la misura n -dimensionale di Q si ottiene dal prodotto delle misure dei singoli intervalli $[a_i, b_i]$:

$$|Q| := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

¹È stata sottintesa la dimensione n . Scriveremo $|E|_n$ nel caso in cui sia necessario indicarla.

Figura 1.1: Plurintervalli in \mathbb{R}^2 .

Indicato ora con \mathcal{D}_1 una suddivisione dell'intervallo $[a_1, b_1]$, \mathcal{D}_2 una suddivisione dell'intervallo $[a_2, b_2]$, \dots \mathcal{D}_n una suddivisione dell'intervallo $[a_n, b_n]$, è possibile determinare una suddivisione di Q in sottointervalli di \mathbb{R}^n considerando il prodotto $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \dots \times \mathcal{D}_n$; chiamiamo **plurintervallo** l'unione di un numero finito di questi sottointervalli:

$$R = \bigcup_{i=1}^n Q_i$$

Q_i indica i sottointervalli di Q relativi alla suddivisione \mathcal{D} .

Definiamo la **misura** di un plurintervallo come la somma delle misure degli intervalli che lo costituiscono:

$$|R| := \sum_{i=1}^n |Q_i|.$$

Nonostante uno stesso plurintervallo possa essere costituito dall'unione di intervalli diversi, che corrispondono a suddivisioni diverse di Q , la sua misura non dipende dalla scelta della suddivisione.

Diamo ora due proprietà della misura dei plurintervalli; siano R_1, R_2 due plurintervalli, si ha:

- (i) $|R_1| \leq |R_2|$ se $R_1 \subseteq R_2$;

- (ii) $|R_1 \cup R_2| \leq |R_1| + |R_2|$; vale l'uguaglianza se e solo se R_1 e R_2 non hanno intervalli in comune.

1.1.2 Insiemi aperti e chiusi

Dato Q un n -intervallo possiamo definire:

- La **misura** di $A \subset Q$ aperto non vuoto di \mathbb{R}^n come:

$$|A| := \sup\{|H| : H \text{ plurintervallo}, H \subset A\}$$

(estremo superiore delle misure dei plurintervalli contenuti in A)².

- La **misura** di $C \subseteq Q$ chiuso di \mathbb{R}^n come:

$$|C| := \inf\{|K| : K \text{ plurintervallo}, K \supseteq C\}$$

(estremo inferiore delle misure dei plurintervalli contenenti C)³.

Diamo ora le proprietà principali della misura degli insiemi aperti e chiusi. Siano A, A_1, A_2 insiemi aperti, C, C_1, C_2 insiemi chiusi, B_1, B_2 aperti oppure chiusi (contenuti in Q). Si ha:

- (i) $|B_1| \leq |B_2|$ se $B_1 \subseteq B_2$;
- (ii) $|A_1 \cup A_2| \leq |A_1| + |A_2|$;
 $|C_1 \cup C_2| \leq |C_1| + |C_2|$;
- (iii) $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$ se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$;
 $|C_1 \cup C_2| = |C_1| + |C_2|$ se $C_1 \cap C_2 = \emptyset$;
- (iv) $|A \setminus C| = |A| - |C|$ se $C \subset A$;

La (iii) e la (iv) si possono estendere a un numero qualsiasi (finito) di addendi.

²Risulta che $|A| \leq |Q|$ e $|A| > 0$.

³Risulta che $|C| \leq |Q|$ se poi $C = Q$ si ha $|C| = |Q|$. Si può anche avere $|C| = 0$.

1.1.3 Insiemi di tipo qualunque

Introduciamo ora il concetto di misura esterna secondo Lebesgue per un generico sottoinsieme limitato di \mathbb{R}^n .

Definizione 1.1. Sia Q un intervallo di \mathbb{R}^n e $E \subseteq Q$. Si definisce la **misura esterna secondo Lebesgue** (o più brevemente misura esterna) di E e la si indica con $|E|^*$, la quantità:

$$|E|^* := \inf\{|A| : A \text{ aperto, } A \supseteq E\}$$

(l'estremo inferiore delle misure degli aperti che ricoprono E).

Definizione 1.2. Sia Q un intervallo di \mathbb{R}^n e $E \subseteq Q$. Si definisce la **misura interna secondo Lebesgue** (o più brevemente misura interna) di E e la si indica con $|E|_*$, la quantità:

$$|E|_* := \sup\{|C| : C \text{ chiuso, } C \subseteq E\}$$

(l'estremo superiore delle misure dei chiusi contenuti in E).

Proposizione 1.1.1. Per ogni insieme $E \subseteq Q$ vale la seguente disuguaglianza:

$$|E|^* \geq |E|_*$$

Osservazione 1. Se E è un insieme aperto, indicata con $|E|$ la sua misura, risulta che:

$$|E|^* = |E| = |E|_* \tag{1.1}$$

La prima uguaglianza è ovvia, per la seconda basta osservare che, essendo i plurintervalli insiemi chiusi, si ha:

$$|E| = \sup\{|H| : H \text{ plurintervallo, } H \subset E\} \leq \sup\{|C| : C \text{ chiuso, } C \subset E\} = |E|_*$$

Quindi, tenuto conto della (1.1), si avrà $|E| = |E|_*$.

In modo analogo, se E è un insieme chiuso $|E|_* = |E| = |E|^*$.

Definizione 1.3. Sia E un insieme limitato di \mathbb{R}^n . E è detto **misurabile secondo Lebesgue** se:

$$|E| := |E|_* = |E|^*$$

ossia, la misura interna e la misura esterna coincidono. Il numero $|E|$ è detto **misura** (n-dimensionale) di E .

È immediato affermare che: *condizione necessaria e sufficiente* affinché un insieme E sia misurabile è che, fissato $\epsilon > 0$, esistano A aperto e C chiuso con $C \subseteq E \subseteq A$, tali che:

$$|A| - |C| < \epsilon$$

o, tenuto conto della proprietà (iv), $|A \setminus C| < \epsilon$.

1.2 Proprietà della misura degli insiemi limitati

Teorema 1.2.1. *La famiglia \mathcal{F} degli insiemi misurabili secondo Lebesgue forma una σ -algebra di \mathbb{R}^n , risultano infatti le proprietà seguenti:*

(i) $\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{F}$;

(ii) se $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili: $E_k \in \mathcal{F}$
 $\forall k \in \mathbb{N}$, allora $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{F}$;

(iii) se $E \in \mathcal{F}$, allora $E^C := \mathbb{R}^n \setminus E \in \mathcal{F}$;

(iv) se $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ è una famiglia numerabile di insiemi misurabili: $E_k \in \mathcal{F}$
 $\forall k \in \mathbb{N}$, allora anche l'insieme $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ è misurabile;

(v) se $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ è una famiglia di insiemi misurabili, allora l'insieme $E := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ soddisfa:

$$|E| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|;$$

(vi) se $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ è una famiglia di insiemi misurabili a due a due disgiunti: $E_k \cap E_j = \emptyset$ se $k \neq j$, allora l'insieme $E := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ soddisfa:

$$|E| = \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|.$$

Le proprietà (v) e (vi) sono dette rispettivamente **subadditività** e **additività numerabile**.

Alla dimostrazione del Teorema (1.2.1) antepriamo due lemmi la cui dimostrazione verrà omessa:

Lemma 1.2.2. Siano A_1, A_2, \dots una successione di aperti e $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ limitato, allora risulta:

- $|A| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|$;
- $|A| = \lim_{k \rightarrow \infty} |A_k|$ se $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$.

Lemma 1.2.3. Siano E_1, E_2, \dots insiemi misurabili limitati e sia $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, allora:

$$|E|^* \leq \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|; \quad (1.2)$$

$$|E|_* \geq \sum_{k=1}^{\infty} |E_k| \quad \text{se } E_k \cap E_j = \emptyset \quad \forall k \neq j. \quad (1.3)$$

Dimostrazione. del Teorema (1.2.1).

Dimostriamo la proprietà (vi). Dalla (1.2) e dalla (1.3) segue che:

$$|E|^* \leq \sum_{k=1}^{\infty} |E_k| \leq |E|_*.$$

Questo significa che E è misurabile e $|E| = \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|$.

Dimostriamo la (ii). Poniamo:

$$F_1 = E_1, \quad F_2 = E_2 \setminus E_1, \dots, \quad F_k = E_k \setminus (E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{k-1}).$$

Gli F_k sono misurabili e a due a due disgiunti e in quanto E è dato dall'unione degli F_k , per la (vi) E è misurabile.

Dimostriamo la (v). Sempre per la (vi), considerato che $F_k \subseteq E_k \forall k$ e quindi $|F_k| \leq |E_k|$, risulta:

$$|E| = \sum_{k=1}^{\infty} |F_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |E_k|.$$

Dimostriamo la (iv). Poiché gli E_k sono misurabili, lo sono anche i E_k^C . Inoltre $(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k)^C = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^C$ quindi $(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k)^C$ è misurabile, pertanto anche $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ lo è. \square

Teorema 1.2.4. (*Continuità della misura*)

Valgono le proprietà seguenti:

- (i) *sia $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ una successione monotona crescente di insiemi misurabili, allora l'insieme $E := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ è misurabile e $|E| = \lim_{k \rightarrow \infty} |E_k|$;*
- (ii) *sia $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ una successione monotona decrescente di insiemi misurabili, allora l'insieme $E := \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ è misurabile e $|E| = \lim_{k \rightarrow \infty} |E_k|$.*

Dimostrazione. Dimostriamo la (i). Per ipotesi, $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$; quindi risulta, $\forall k = 2, 3, \dots$:

$$E_k = E_{k-1} \cup (E_k \setminus E_{k-1})$$

da cui $|E_k| = |E_{k-1}| + |E_k \setminus E_{k-1}|$, ossia $|E_k \setminus E_{k-1}| = |E_k| - |E_{k-1}|$ e quindi, essendo E unione di insiemi a due a due disgiunti

$$E = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) \cup \dots \cup (E_k \setminus E_{k-1}) \cup \dots$$

si ha

$$|E| = |E_1| + (|E_2| - |E_1|) + \dots + (|E_k| - |E_{k-1}|) + \dots = \lim_{k \rightarrow \infty} |E_k|$$

Dimostriamo la (ii). Per ipotesi $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$ possiamo allora scrivere E_1 come unione di insiemi misurabili a due a due disgiunti

$$E_1 = E \cup (E_1 \setminus E_2) \cup \dots \cup (E_k \setminus E_{k+1}) \cup \dots$$

da cui segue

$$|E_1| = |E| + (|E_1| - |E_2|) + \cdots + (|E_k| - |E_{k+1}|) + \cdots = |E| + |E_1| - \lim_{k \rightarrow \infty} |E_k|$$

la quale implica la tesi. \square

Dai precedenti risultati segue il seguente:

Teorema 1.2.5. *Siano E, F due insiemi misurabili (contenuti nell'intervallo Q), allora anche gli insiemi $E \cup F, E \cap F, E \setminus F, E^C$ sono misurabili e inoltre segue che:*

- (a) $|E| \leq |F|$ se $E \subseteq F$ (monotonia);
- (b) $|E| + |F| = |E \cup F| + |E \cap F|$.

In particolare, se E ed F sono insiemi disgiunti, o comunque la loro intersezione è un insieme trascurabile⁴, risulta:

- (c) $|E| + |F| = |E \cup F|$.

Dimostrazione. Per prima cosa, verifichiamo che l'insieme $E \setminus F$ è misurabile. Fissiamo $\epsilon > 0$ e consideriamo A_1, A_2 due insiemi aperti e C_1, C_2 due insiemi chiusi tali che:

- $C_1 \subseteq E \subseteq A_1, \quad |A_1 \setminus C_1| < \frac{\epsilon}{2};$
- $C_2 \subseteq F \subseteq A_2, \quad |A_2 \setminus C_2| < \frac{\epsilon}{2}.$

Posto $A = A_1 \setminus C_2$ e $C = C_1 \setminus A_2$, A e C sono rispettivamente un aperto e un chiuso tali che:

$$C \subseteq E \setminus F \subseteq A.$$

Facciamo vedere che $|A \setminus C| < \epsilon$. $A \setminus C$ è un aperto e

$$A - C \subseteq (A_1 \setminus C_1) \cup (A_2 \setminus C_2)$$

⁴Insieme di misura nulla (vedi [10, pag 383] per maggiori dettagli).

e quindi

$$|A \setminus C| \leq |A_1 \setminus C_1| + |A_2 \setminus C_2| < \epsilon.$$

Questo dimostra che $E \setminus F$ è misurabile. Da cui segue che anche $E^C = Q \setminus E$ e $E \cap F = E \setminus (E \setminus F)$ sono insiemi misurabili.

Ora dimostriamo che $E \cup F$ è misurabile; basterà far vedere che questo fatto vale nel caso in cui E ed F siano insiemi disgiunti, in quanto diversamente si può scrivere

$$E \cup F = (E \cap F) \cup (E \setminus F) \cup (F \setminus E) \quad (1.4)$$

e gli insiemi a secondo membro nella relazione precedente sono a due a due disgiunti.

Supponiamo quindi che E ed F siano insiemi disgiunti e siano A_1, A_2 insiemi aperti e C_1, C_2 insiemi chiusi. Poniamo $A = A_1 \cup A_2$ e $C = C_1 \cup C_2$ segue allora

$$A \supseteq E \cup F \supseteq C.$$

In quanto, per la proprietà (iii) degli insiemi aperti e chiusi (paragrafo 1.1.2) si ha $|C| = |C_1| + |C_2|$ segue

$$|A \setminus C| = |A| - |C| \leq |A_1| + |A_2| - |C_1| - |C_2| = |A_1 \setminus C_1| + |A_2 \setminus C_2| < \epsilon$$

Dalla quale segue che $E \cup F$ è misurabile.

Verifichiamo ora la (c). In quanto:

- $|C_1| \leq |E| \leq |A_1| < |C_1| + \frac{\epsilon}{2}$
- $|C_2| \leq |F| \leq |A_2| < |C_2| + \frac{\epsilon}{2}$

possiamo ricavare che

$$|C| = |C_1| + |C_2| \leq |E| + |F| < |C_1| + |C_2| + \epsilon = |C| + \epsilon;$$

ma in quanto anche

$$|C| \leq |E \cup F| \leq |A| < |C| + \epsilon,$$

segue

$$||E \cup F| - |E| - |F|| < \epsilon$$

per l'arbitrarietà di ϵ segue la tesi.

Per dimostrare la (b) è sufficiente scrivere

$$E = (E \cap F) \cup (E \setminus F), \quad F = (E \cap F) \cup (F \setminus E)$$

e quindi

$$|E| = |E \cap F| + |E \setminus F|, \quad |F| = |E \cap F| + |F \setminus E|$$

avendo anche per la (1.4)

$$|E \cup F| = |E \cap F| + |E \setminus F| + |F \setminus E|,$$

si ottiene la tesi componendo le ultime tre relazioni.

Infine, possiamo dimostrare la proprietà (a), la quale segue dal fatto che, poiché se $F \supseteq E$, $F = E \cup (F \setminus E)$ con $E \cap (F \setminus E) = \emptyset$ si ha

$$|F| = |E| + |F \setminus E| \geq |E|.$$

Il teorema è così dimostrato. □

Concludendo diamo un'ultima proprietà della misura.

Proposizione 1.2.6. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile (contenuto nell'intervallo Q):*

(i) *considerato il vettore \mathbf{h} di \mathbb{R}^n e l'insieme*

$$E_{\mathbf{h}} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{h}, \mathbf{x} \in E\};$$

*$E_{\mathbf{h}}$ è misurabile e $|E| = |E_{\mathbf{h}}|$. Questa proprietà è detta **invarianza per traslazioni**;*

(ii) *sia A una matrice ortogonale quadrata di ordine n , considerato l'insieme*

$$F = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \in E\};$$

*F è misurabile e $|E| = |F|$. Questa proprietà è detta **invarianza per trasformazioni ortogonali**.*

1.3 Insiemi non limitati

Infine, diamo la definizione di misura per gli insiemi non limitati di \mathbb{R}^n .

Definizione 1.4. Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\{Q_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) la successione degli intervalli: $|x_i| \leq k$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Allora E è misurabile se $E \cap Q_k$ è misurabile $\forall k$, scriveremo allora $|E| := \lim_{k \rightarrow \infty} |E \cap Q_k|$ ⁵.

Osservazione 2. Le proprietà degli insiemi misurabili limitati, viste in precedenza, si possono estendere tranquillamente al caso più generale di insiemi non limitati.

⁵Il limite esiste in quanto la successione $\{|E \cap Q_k|\}$ è crescente, esso può essere finito o $+\infty$.

Capitolo 2

Insiemi non misurabili

2.1 Giuseppe Vitali: biografia

Giuseppe Vitali fu un matematico italiano, nacque a Ravenna il 26 Agosto 1875.

Maggiore di cinque figli, intraprese gli studi classici presso il Liceo Dante Alighieri di Ravenna.



Figura 2.1: Giuseppe Vitali.

A partire dall'autunno 1895, iniziò i suoi studi universitari presso l'Università di Bologna. I suoi principali insegnanti furono Cesare Arzelà (professore di Analisi superiore) e Federico Enriques (professore di Geometria proiettiva

e descrittiva), i quali rimasero impressionati dal giovane studente tanto da sostenere la sua richiesta di borsa di studio presso la Scuola Normale Superiore di Pisa, nella quale iniziò gli studi nel 1897. È qui che venne fortemente influenzato da Luigi Bianchi suo insegnante di Geometria analitica (nonché suo relatore di tesi) e da Ulisse Dini insegnante di Calcolo infinitesimale, del quale fu per due anni assistente.

Si laureò il 3 Luglio 1899 con una tesi dal titolo "*Intorno alle funzioni analitiche sulle superfici di Riemann*".

Nei primi anni del XX secolo, a causa di problemi economici, si trovò costretto ad abbandonare la carriera universitaria per dedicarsi all'insegnamento nella scuola secondaria. Insegnò prima a Sassari e a Voghera, per poi concludere il suo percorso a Genova, città nella quale ricoprì importanti cariche politiche e divenne membro del Partito Socialista Italiano.

Nel 1923, in seguito a un concorso, divenne professore di Analisi infinitesimale all'Università di Modena, l'anno dopo venne poi nominato per una cattedra di Analisi matematica presso l'Università di Padova.

Nel 1926 Vitali venne colpito da una grave malattia e, nonostante i problemi di salute, diede notevoli contributi in campo scientifico. In quegli stessi anni, allo scopo di incoraggiare la ricerca e l'insegnamento in ambito matematico, fondò il "*Seminario matematico dell'Università di Padova*" di cui fu il primo direttore, organizzando seminari e conferenze e un giornale intitolato "*Rendiconti del Seminario matematico dell'Università di Padova*" che iniziò a pubblicare nel 1930. Il primo volume di questo giornale conteneva un suo articolo dal titolo "*Determinazione della superficie di area minima nello spazio hilbertiano*".

Ancora oggi il giornale fondato dal matematico italiano viene pubblicato, la sua pubblicazione è stata interrotta solamente durante la Seconda Guerra Mondiale, dal 1944 al 1945.

Infine, nel 1930 gli venne assegnata una cattedra presso l'Università di Bologna.

Vitali, per buona parte della sua carriera, lavorò e studiò senza avere

contatti con altri studiosi, questo lo portò alla riscoperta di risultati già noti, ma anche ad alcune scoperte straordinariamente originali. Fu autore, infatti, di notevoli ricerche e diede importanti contributi alla teoria delle funzioni e della misura. In particolare a lui si deve: il teorema sulla discontinuità dei punti delle funzioni integrabili secondo Riemann (1903), il concetto di funzione assolutamente continua (1905), il teorema sulla quasi continuità delle funzioni misurabili (1905), il primo esempio di sottoinsieme di \mathbb{R} non misurabile secondo Lebesgue (1905), il teorema di copertura (1908), un criterio per la chiusura di un sistema di funzioni ortogonali, un teorema sulla convergenza e l'analiticità della somma di una serie di funzioni analitiche.

Per concludere, negli ultimi anni si occupò di Calcolo differenziale e della Geometria degli spazi di Hilbert.

Giuseppe Vitali morì a Bologna il 29 Febbraio 1932.

2.2 Insieme di Vitali: un primo esempio di insieme non misurabile

Dato l'intervallo $[0, 1]$, introduciamo la seguente relazione:

per ogni $x, y \in [0, 1]$, $x \sim y$ se e solo se $x - y \in \mathbb{Q}$.

La relazione \sim è di equivalenza su $[0, 1]$, è infatti:

- riflessiva: $x \sim x \ \forall x \in [0, 1]$, perché $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$;
- simmetrica: se $x \sim y$, allora $y \sim x$, perché $x - y \in \mathbb{Q}$ se e solo se $y - x \in \mathbb{Q}$;
- transitiva: $\forall x, y, z \in [0, 1]$, se $x \sim y$ e $y \sim z$ allora $x \sim z$, perché se $x - y \in \mathbb{Q}$ e $y - z \in \mathbb{Q}$, allora $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Q}$.

La classe di equivalenza in $[0, 1]$ rispetto alla relazione \sim contenente il punto x , sarà indicata con $[x]_{\sim}$. Tali classi formano una partizione dell'insieme $[0, 1]$. Indicato con A l'insieme quoziente, A risulta essere costituito

da un'infinità non numerabile di classi di equivalenza, poiché se per assurdo fossero un'infinità numerabile, anche $[0, 1]$ risulterebbe numerabile in quanto unione di insiemi numerabili.

Definizione 2.1. Chiamiamo **Insieme di Vitali** l'insieme $E \subset [0, 1]$ che si ottiene scegliendo da ogni classe di equivalenza di A un unico rappresentante.

L'esistenza dell'insieme E è garantita dall'Assioma di Scelta¹, il quale però assicura solamente l'esistenza, ma non ci dà una legge esplicita per la costruzione.

Pertanto, l'assioma assicura l'esistenza dell'insieme di Vitali (ovviamente esso non è unico).

Sia $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$, indichiamo il traslato di E di vettore r con:

$$E_r = \{y \in \mathbb{R} : y = x + r, x \in E\}.$$

Proposizione 2.2.1. *L'insieme E e il traslato razionale E_r sono insiemi disgiunti.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $E \cap E_r \neq \emptyset$, allora esisterebbero $x, y \in E$, $x \neq y$, tali che $y = x + r$, ossia tali che $y - x = r \in \mathbb{Q}$, il quale è impossibile in quanto x e y appartengono a classi diverse; questo fatto ci permette inoltre di affermare che dati due qualunque traslati E_r e E_s essi sono disgiunti per $r \neq s$. \square

Proposizione 2.2.2. *I traslati E_r al variare di $r \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ coprono l'intervallo $[0, 1]$ e sono contenuti in $[-1, 2]$. In formule, indicato con $S = \bigcup_{r \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}} E_r$:*

$$[0, 1] \subseteq S \subseteq [-1, 2].$$

¹L'**Assioma di Scelta**, detto anche di Zermelo, postula l'esistenza di una funzione f , detta funzione di scelta che, data una qualsiasi famiglia non vuota di insiemi a due a due disgiunti \mathcal{C} , permette di associare ad ogni insieme della famiglia un suo elemento, ossia $f(A) \in A$ per ogni $A \in \mathcal{C}$.

Dimostrazione. Dimostriamo la prima inclusione. Sia $x \in [0, 1]$. Nella classe di equivalenza $[x]_{\sim}$ esiste un (unico) rappresentante $y \in E \subset [0, 1]$. Posto $r = x - y$ risulta che $r \in \mathbb{Q}$ in quanto x e y appartengono alla stessa classe di equivalenza e inoltre poiché r è la differenza di due numeri razionali di $[0, 1]$ necessariamente $-1 = 0 - 1 < r = x - y < 1 - 0 = 1$. La seconda inclusione è banale. \square

Teorema 2.2.3. (di Vitali, [14])

L'insieme di Vitali non è misurabile secondo Lebesgue.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che E sia misurabile. In particolare

$$0 \leq |E| \leq |[0, 1]| = 1.$$

Se E fosse misurabile, anche ogni suo traslato E_r lo sarebbe e anche $S = \bigcup_{r \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}} E_r$ lo sarebbe in quanto unione numerabile e disgiunta di insiemi misurabili. Quindi, usando la proprietà di invarianza per traslazioni si avrebbe:

$$|S| = \sum_{r \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}} |E_r| = \sum_{r \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}} |E|$$

La quantità $|E|$ non dipende da r per cui:

$$\begin{aligned} |S| &= \sum_{r \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}} |E| = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } |E| = 0 \\ +\infty & \text{se } |E| > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Peraltro, dalla Proposizione (2.2.2), si ottiene per monotonia:

$$|[0, 1]| \leq |S| \leq |[-1, 2]|$$

ossia

$$1 \leq |S| \leq 3. \quad (2.2)$$

Siamo però giunti a una contraddizione, le formule (2.1) e (2.2) sono fra loro incompatibili, in quanto né 0 né $+\infty$ sono compresi tra 1 e 3. Possiamo così concludere che E non è un insieme misurabile. \square

Osservazione 3. La dimostrazione precedente può essere semplicemente modificata per riuscire a dimostrare che ogni insieme misurabile di misura positiva di \mathbb{R} contiene un sottoinsieme non misurabile.

La dimostrazione di ciò che è stato affermato nell'osservazione precedente segue dalla prossima costruzione, la quale consente di costruire un insieme di numeri reali appartenenti all'intervallo $(-1, 1)$ non misurabile secondo Lebesgue, [2].

2.2.1 Costruzione di un insieme non misurabile

Il primo passo nella costruzione di un insieme non misurabile consiste nella decomposizione dell'intervallo $(-1, 1)$.

Sia $x \in (-1, 1)$, definiamo l'insieme:

$$A_x = \{y \in (-1, 1) : y - x = r, r \text{ numero razionale}\}.$$

Gli insiemi A_x così definiti soddisfano le proprietà seguenti:

- (i) ogni A_x è numerabile;
- (ii) se x è un numero razionale, A_x rappresenta l'insieme dei razionali in $(-1, 1)$;
- (iii) se x è un numero irrazionale, allora ogni rappresentante di A_x è un numero irrazionale;
- (iv) se $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ e $x_1 - x_2$ è un numero razionale, allora $A_{x_1} = A_{x_2}$;
- (v) se $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ e $x_1 - x_2$ è un numero irrazionale, allora $A_{x_1} \cap A_{x_2} = \emptyset$;
- (vi) la famiglia di insiemi A_x non è numerabile.

In sintesi, abbiamo decomposto l'intervallo $(-1, 1)$ in una collezione non numerabile di insiemi a due a due disgiunti e ciascuno di essi è numerabile.

Da ognuno di questi insiemi A_x selezioniamo un punto utilizzando l'Assioma di Scelta e indichiamo l'insieme di tali rappresentanti con \mathcal{N} . Per costruzione, \mathcal{N} risulta essere un insieme non numerabile, un sottoinsieme di $(-1, 1)$ e tale che $\mathcal{N} \cap A_x$ è costituito da un singolo punto.

Verificheremo che \mathcal{N} non è misurabile utilizzando le proprietà di subadditività e invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue.

Proseguiamo la costruzione enumerando i razionali nell'intervallo $(-2, 2)$: $r_1, r_2, r_3 \dots$ e definiamo l'insieme:

$$\mathcal{N} + r_n = \{x + r_n : x \in \mathcal{N}, -2 < r_n < 2, r_n \text{ numero razionale}\}.$$

Notiamo che, in quanto $\mathcal{N} \subset (-1, 1)$, $\mathcal{N} + r_n \subset (-3, 3)$. Richiediamo poi che $(\mathcal{N} + r_n) \cap (\mathcal{N} + r_m) = \emptyset$ se $r_n \neq r_m$. Supponendo per assurdo che l'intersezione non sia vuota si avrebbe: $z \in (\mathcal{N} + r_n) \cap (\mathcal{N} + r_m)$ allora, $z = x + r_n = y + r_m$ o $x - y$ razionale con $x, y \in \mathcal{N}$ appartenenti alla stessa classe di equivalenza. Tuttavia, abbiamo costruito \mathcal{N} scegliendo singoli punti da insiemi disgiunti, in questo modo x dovrebbe essere uguale a y , ma allora si avrebbe $r_n = r_m$, ma ciò è in contraddizione con $r_n \neq r_m$, condizione richiesta prima. Quindi, la famiglia $\{\mathcal{N} + r_n\}$ forma un ricoprimento numerabile di insiemi disgiunti dell'intervallo $(-1, 1)$ e ogni elemento è un sottoinsieme dell'intervallo $(-3, 3)$:

$$(-1, 1) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathcal{N} + r_n) \subset (-3, 3).$$

Se \mathcal{N} fosse misurabile, anche $\mathcal{N} + r_n$ lo sarebbe e, in quanto la misura secondo Lebesgue soddisfa l'invarianza per traslazioni si avrebbe $|\mathcal{N}| = |\mathcal{N} + r_n|$ e per l'additività numerabile:

$$\left| \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathcal{N} + r_n) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |\mathcal{N} + r_n|$$

dalla quale segue:

$$2 = |[-1, 1]| \leq \left| \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathcal{N} + r_n) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |\mathcal{N} + r_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |\mathcal{N}| \leq |[-3, 3]| = 6$$

e concludendo:

$$2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mathcal{N}| \leq 6.$$

La disuguaglianza a sinistra, implica che $|\mathcal{N}| > 0$, mentre la disuguaglianza a destra implica che $|\mathcal{N}| = 0$. Ma non possiamo avere entrambi i casi, abbiamo così ottenuto una contraddizione che ci permette di affermare che l'insieme \mathcal{N} non è misurabile.

RIEPILOGO COSTRUZIONE:

1. Decomponiamo l'intervallo $(-1, 1)$ in una collezione non numerabile di insiemi numerabili e disgiunti;
2. Utilizziamo l'Assioma di Scelta per selezionare un elemento da ciascuno degli insiemi ottenuti. Indichiamo con \mathcal{N} l'insieme di questi punti, che mostreremo poi non essere misurabile;
3. Formiamo una collezione numerabile di traslazioni disgiunte di \mathcal{N} : $\{\mathcal{N} + r_n : r_1, r_2, r_3 \dots \text{numeri razionali in } (-2, 2)\}$;
4. Infine, osserviamo che $(-1, 1) \subset \bigcup (\mathcal{N} + r_n) \subset (-3, 3)$ e dato che la misura di Lebesgue è invariante per traslazioni e subadditiva numerabile, segue che $|\mathcal{N}| = 0$ e $|\mathcal{N}| > 0$.

Il procedimento appena visto permette di dimostrare il seguente:

Teorema 2.2.4. *Ogni sottinsieme misurabile $A \subset \mathbb{R}$ con $|A| > 0$ contiene un sottoinsieme non misurabile.*

Osservazione 4. Modificando ulteriormente la costruzione (2.2.1) e la dimostrazione del Teorema di Vitali, considerando \mathbb{R}^n , l'n-cubo $[0, 1]^n$ e una relazione di equivalenza simile a quella definita prima, ma ottenuta considerando \mathbb{Q}^n anzichè \mathbb{Q} si può verificare che esistono sottoinsiemi di \mathbb{R}^n che non sono misurabili secondo Lebesgue.

2.3 Un'applicazione del Teorema di Vitali

In questo paragrafo mettiamo in pratica il risultato ottenuto da Giuseppe Vitali, applicando il suo teorema ad una proprietà ottenuta dal matematico polacco Steinhaus ² (vedi [6]).

Steinhaus dimostrò che per ogni insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ misurabile secondo Lebesgue vale la proprietà seguente³:

$$0 \in \text{int}(A - A) \quad (\text{versione classica}) \quad (2.3)$$

proprietà che alcuni autori scrivono nel seguente modo alternativo:

$$\text{int}(A - A) \neq \emptyset \quad (\text{versione debole}). \quad (2.4)$$

Dove, con la dicitura $(A - A)$, si è voluto indicare l'insieme $\{a - b : a, b \in A\}$.

L'insieme che costruiremo mostrerà che, senza alcune ipotesi aggiuntive, le proprietà (2.3) e (2.4) non sono equivalenti. Infatti, dato $A \subseteq \mathbb{R}$ con $\mathcal{A} = \{\mathbb{R}, \emptyset, A, \mathbb{R} \setminus A\}$ e $\mathcal{J} = \{\emptyset\}$ faremo vedere che A soddisfa la versione debole della proprietà di Steinhaus ma non la definizione classica.

Teorema 2.3.1. *Esiste un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\text{int}(A - A) \neq \emptyset$ ma $0 \notin \text{int}(A - A)$.*

Dimostrazione. Sia E l'insieme di Vitali non misurabile secondo Lebesgue costruito nell'intervallo $[0, 1]$ tale che $0 \in E$ e sia $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ la successione di numeri razionali in $[-1, 1]$. Costruiremo una sequenza $\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$ di insiemi traslati di Vitali tali che $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ soddisfi la tesi del teorema.

²Hugo Dionizy Steinhaus (Jaslo, 4 Gennaio 1887 - Breslavia, 25 Febbraio 1972)

³Nello specifico la proprietà di Steinhaus afferma che: data la coppia $\langle \mathcal{A}, \mathcal{J} \rangle$, costituita dall'algebra \mathcal{A} e dall'ideale $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}$, vale:

$$\forall A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{J}, 0 \in \text{int}(A - A) \quad (\text{versione classica})$$

o in modo alternativo:

$$\forall A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{J}, \text{int}(A - A) \neq \emptyset \quad (\text{versione debole})$$

Sia $E_0 = E$ e

$$E_n = \begin{cases} E + 2n & \text{quando } n \text{ è pari} \\ E + 2n + a_{\frac{n+1}{2}} & \text{quando } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

per $n \geq 1$.

Mostriamo che $(A - A) \cap (-1, 1) \subseteq (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}$, da cui seguirà che $0 \notin \text{int}(A - A)$. Sia $x \in (A - A) \cap (-1, 1)$. Allora $x = v'_1 - v'_2$ per qualche $v'_1, v'_2 \in A$. È semplice verificare che $v'_1 \in E_n$ e $v'_2 \in E_{n+1}$ oppure $v'_2 \in E_{n-1}$, per qualche n , questo perchè in ogni altro caso si avrebbe $|v'_1 - v'_2| > 1$, il quale contraddice la scelta fatta per x .

Supponiamo quindi, che $v'_1 \in E_n$, $v'_2 \in E_{n+1}$ e sia n un numero pari, dati $v_1, v_2 \in E$ siano $v'_1 = v_1 + 2n$ e $v'_2 = v_2 + 2(n+1) + a_{\frac{n+2}{2}}$. Allora

$$\begin{aligned} v'_1 - v'_2 &= v_1 + 2n - (v_2 + 2(n+1) + a_{\frac{n+2}{2}}) = v_1 - v_2 - 2 - a_{\frac{n+2}{2}} \leq \\ &\leq v_1 - v_2 - 2 + 1 = v_1 - v_2 - 1 \end{aligned}$$

Siccome $x \in (-1, 1)$, $v_1 - v_2 > 0$, risulta che $v_1 - v_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, e quindi $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Le dimostrazioni dei casi rimanenti sono simili.

Ora non ci resta che far vedere che $[2, 3] \subseteq A - A$. Sia a tal proposito, $v' \in E_n$ quando n è dispari. Allora $v' = v + 2n + a_{\frac{n+1}{2}}$ per qualche $v \in E$. In quanto, $0 \in E$ per ipotesi, segue che $2(n-1) \in E_{n-1}$, allora $v' - 2(n-1) \in A - A$, e

$$v' - 2(n-1) = v + 2n + a_{\frac{n+1}{2}} - 2n + 2 = v + a_{\frac{n+1}{2}} + 2.$$

Dalla quale segue che $v + a_{\frac{n+1}{2}} + 2 \in A - A$ per ogni $v \in E$. Quindi $E + a_{\frac{n+1}{2}} + 2 \subseteq A - A$. Allo stesso modo $E + a_n + 2 \subseteq A - A$ per ogni n . Questo implica che

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (E + a_n + 2) \subseteq A - A$$

e

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (E + a_n + 2) = 2 + \bigcup_{n=1}^{\infty} (E + a_n) = 2 + \bigcup_{q \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}} (E + q) \supseteq 2 + [0, 1].$$

Pertanto: $[2, 3] \subseteq A - A$ e $(2, 3) = \text{int}([2, 3]) \subseteq \text{int}(A - A)$

□

Capitolo 3

Un sottoinsieme non misurabile del toro \mathbb{T}^2

Vediamo ora un esempio di insieme non misurabile secondo Lebesgue nel piano \mathbb{R}^2 , il quale si ottiene impiegando il procedimento utilizzato da Vitali nel suo teorema, operando però opportune modifiche, [11].

Applicheremo l'idea del matematico italiano al quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ nel piano \mathbb{R}^2 e rispetto al suo modello, l'esempio che vedremo risulterà più vantaggioso perché avremo a che fare con un oggetto più visivo in quanto apparirà come un sottoinsieme del toro \mathbb{T}^2 . Per comprenderlo al meglio e capire appieno la costruzione, è necessario considerare i diversi modi con la quale è possibile descrivere il toro \mathbb{T}^2 . Verranno, infatti, sfruttate le proprietà teoriche e topologiche associate a due diverse rappresentazioni di tale superficie, le quali permetteranno di costruire un interessante esempio di insieme non misurabile.

3.1 Il toro \mathbb{T}^2

Vi sono descrizioni topologiche di alcune superfici elementari che si ottengono identificando i lati opposti di un quadrato. Un esempio di questi è proprio il toro \mathbb{T}^2 . Considerato, infatti, il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ come sotto-

spazio topologico di \mathbb{R}^2 dotato dell'usuale topologia, esso si ottiene identificando sia i lati superiore e inferiore, che i lati verticali. Questa identificazione viene descritta mediante un quadrato con una freccia lungo il lato superiore e una freccia con lo stesso verso lungo il lato inferiore, lo stesso vale per i lati verticali, le frecce puntano dalla stessa parte (figura (3.1)).

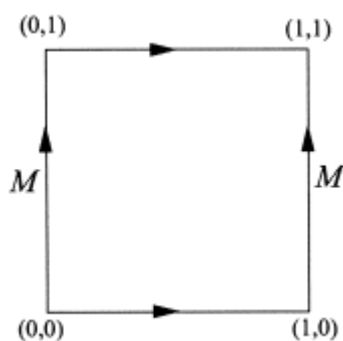


Figura 3.1: Quadrato con bordi identificati.

Ciò che è stato appena detto può essere descritto tramite l'applicazione $\Omega : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, definita da:

$$\Omega(r, s) = ([2 + \cos(2\pi s)] \cos(2\pi r), [2 + \cos(2\pi s)] \sin(2\pi r), \sin(2\pi s)),$$

che rappresenta la superficie a ciambella e fornisce una rappresentazione del toro \mathbb{T}^2 come sottospazio di \mathbb{R}^3 . Di fatto identifica la coppia di bordi $[0, 1] \times \{0\}$ e $[0, 1] \times \{1\}$ e la coppia di bordi $\{0\} \times [0, 1]$ e $\{1\} \times [0, 1]$.

Quest'ultima coppia di bordi del quadrato, indicati con M nella figura (3.2), corrisponde a una circonferenza sul toro \mathbb{T}^2 chiamata **meridiano**.

Un altro modo con la quale è possibile visualizzare il toro \mathbb{T}^2 è rappresentato dal prodotto cartesiano di due circonferenze $S^1 \times S^1$, dove $S^1 = \{e^{2\pi ir} : 0 \leq r \leq 1\}$ è la circonferenza unitaria nel piano complesso \mathbb{C} . Visto in questo modo il toro \mathbb{T}^2 è una superficie topologica, la quale è raffigurata dall'applicazione:

$$\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$$

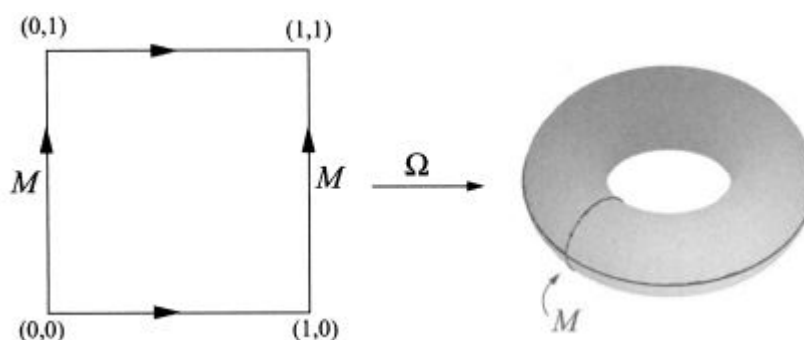


Figura 3.2: Il toro \mathbb{T}^2 è un quadrato con i bordi identificati.

definita da $\Psi(r, s) = (e^{2\pi ir}, e^{2\pi is})$, che soddisfa

$$\Psi((a, b) + (c, d)) = \Psi((a, b))\Psi((c, d)),$$

dove (a, b) e (c, d) sono punti di \mathbb{R}^2 ; Ψ è un'applicazione continua e suriettiva, in particolare è un omomorfismo tra il gruppo additivo \mathbb{R}^2 e il gruppo moltiplicativo \mathbb{T}^2 . Inoltre, i punti (a, b) e (c, d) sono identificati tramite Ψ se $(e^{2\pi ia}, e^{2\pi ib}) = (e^{2\pi ic}, e^{2\pi id})$. In questo modo, ogni quadrato unitario di \mathbb{R}^2 si avvolge attorno al toro \mathbb{T}^2 un'unica volta. Si noti inoltre, dalla figura (3.3), che ogni linea verticale M_k corrisponde al meridiano M .

Da ultimo, l'applicazione Ψ suggerisce un altro modo per descrivere il toro \mathbb{T}^2 . Possiamo esprimere questa superficie come quoziente dello spazio \mathbb{R}^2 rispetto alla seguente relazione di equivalenza: due punti (a, b) e (c, d) nel piano sono identificati se $c = a + k$ e $d = b + l$ con k, l numeri interi. In questo caso scriveremo $(a, b) \equiv (c, d) \pmod{1}$.

3.2 Sottogruppo a un parametro del toro \mathbb{T}^2

Descriveremo ora un omomorfismo tra il gruppo additivo \mathbb{R} e il toro \mathbb{T}^2 , il quale farà sì che la retta reale si avvolga attorno alla superficie del toro \mathbb{T}^2 .

Per visualizzare questa applicazione, per prima cosa considereremo una mappa da \mathbb{R} in \mathbb{R}^2 e poi identificheremo \mathbb{R}^2 con il toro \mathbb{T}^2 tramite l'applicazione Ψ definita nel paragrafo (3.1).

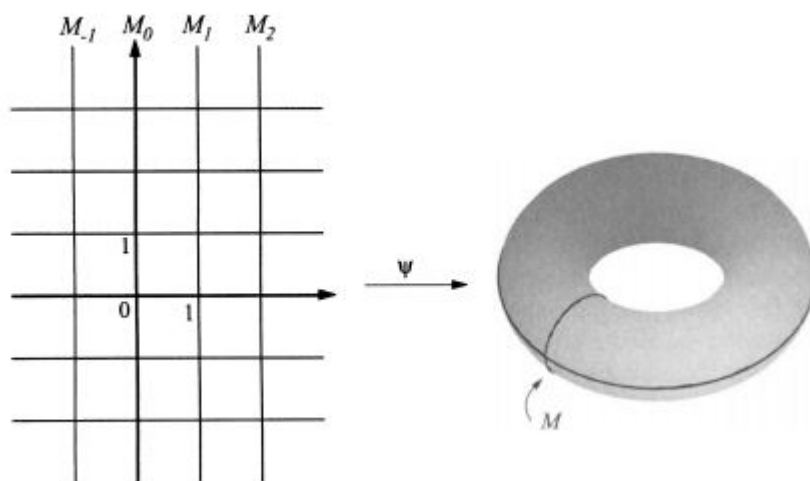


Figura 3.3: Ogni quadrato unitario del piano è identificato con il toro \mathbb{T}^2 tramite Ψ .

Siano α, β due numeri reali fissati, l'applicazione $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $\varphi(t) = (\alpha t, \beta t)$ è un'applicazione continua tra i gruppi additivi \mathbb{R} e \mathbb{R}^2 . L'immagine di φ , detta **sottogruppo a un parametro** di \mathbb{R}^2 , è una retta di equazione cartesiana $y = \frac{\beta}{\alpha}x$.

È semplice verificare che se due punti $(\alpha s, \beta s)$ e $(\alpha t, \beta t)$ corrispondenti a valori diversi di s e t in \mathbb{R} sono congrui mod 1, allora $\frac{\beta}{\alpha}$ è un numero razionale.

Supponiamo però, fissati i numeri α, β , che il loro rapporto sia un numero irrazionale. In questo caso, se $(\alpha s, \beta s) \equiv (\alpha t, \beta t) \pmod{1}$, allora $s = t$. In questo modo, la composizione

$$\Psi \circ \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$$

è iniettiva e anche un omomorfismo tra gruppi, la cui immagine è un sottogruppo a un parametro di \mathbb{T}^2 . Indicata con L l'immagine di φ in \mathbb{R}^2 , allora L è una retta nel piano. Possiamo visualizzare la sua immagine $\Psi(L)$ come un'elica che si avvolge attorno al toro \mathbb{T}^2 . Nella figura (3.4) è indicata con le linee in grassetto.

In particolare, la retta L si avvolge, per effetto di $\Psi \circ \varphi$, sulla superficie del toro \mathbb{T}^2 senza mai intersecarsi e lo ricopre in modo denso.

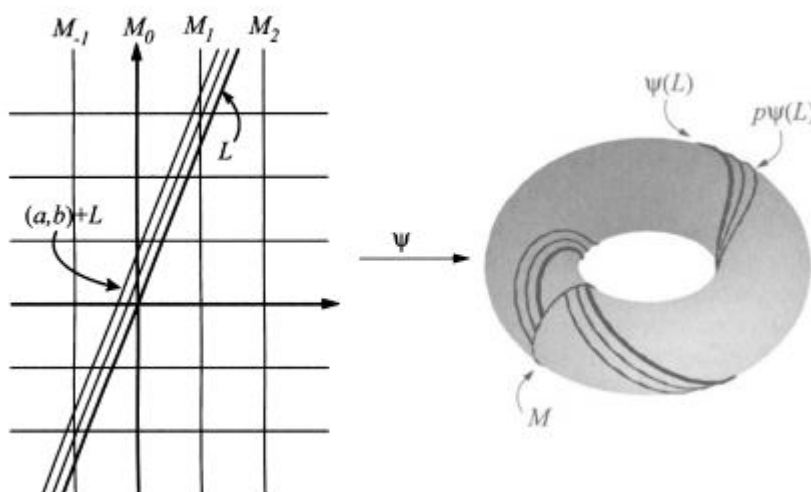


Figura 3.4: La retta L e le sue traslate corrispondono ad eliche parallele sul toro \mathbb{T}^2 .

La retta L è un sottogruppo del gruppo additivo \mathbb{R}^2 . Per ogni $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ la classe laterale $(a, b) + L$ rappresenta una retta parallela a L , spesso chiamata **traslata** di L . Mentre, in quanto Ψ è un omomorfismo, l'immagine $\Psi(L)$ è un sottogruppo del gruppo moltiplicativo del toro \mathbb{T}^2 . Per ogni $p \in \mathbb{T}^2$, la classe laterale $p\Psi(L)$ rappresenta un'elica parallela a $\Psi(L)$ ed è l'immagine della retta $(a, b) + L$ parallela a L . Infatti, se $p = \Psi(a, b)$, allora

$$\Psi((a, b) + L) = \Psi((a, b))\Psi(L) = p\Psi(L).$$

Vale a dire che, tramite Ψ , rette parallele della forma $(a, b) + L$ in \mathbb{R}^2 corrispondono a eliche parallele della forma $p\Psi(L)$ che si avvolgono attorno al toro \mathbb{T}^2 . La figura (3.4) mostra tre di queste rette e le corrispettive eliche sul toro \mathbb{T}^2 . È importante notare che le rette $(a, b) + L$ e $(c, d) + L$ corrispondono alla stessa elica sul toro \mathbb{T}^2 se e solo se $(a, b) \equiv (c, d) \pmod{1}$.

Infine, possiamo vedere (figura (3.4)) che ogni elica $p\Psi(L)$ interseca il meridiano M del toro \mathbb{T}^2 infinite volte.

Ora, applicando l'Assioma di Scelta, possiamo costruire un sottoinsieme Λ di M tale che ogni classe laterale di $\Psi(L)$ possa essere rappresentata da un unico punto in Λ , in questo modo l'insieme $p\Psi(L)$, $p \in \Lambda$, forma un insieme

completo di classi laterali di $\Psi(L)$ in \mathbb{T}^2 , in modo tale che si possa ottenere il toro \mathbb{T}^2 come unione disgiunta di esse:

$$\bigcup_{p \in \Lambda} (p\Psi(L)) = \mathbb{T}^2.$$

In altre parole, possiamo visualizzare il toro \mathbb{T}^2 come unione disgiunta non numerabile di eliche parallele ognuna delle quali è una classe laterale di $\Psi(L)$.

3.3 Costruzione di un sottoinsieme non misurabile del toro \mathbb{T}^2

Costruiremo ora un insieme non misurabile partizionando il toro \mathbb{T}^2 come unione disgiunta di insiemi A_k numerabili e geometricamente congruenti. Iniziamo col considerare i sottoinsiemi del piano costituiti da quelle parti delle classi laterali che stanno nello spazio compreso tra le rette verticali M_k e M_{k+1} . Gli insiemi A_k saranno i corrispondenti insiemi sul toro \mathbb{T}^2 . Essi possono essere visualizzati come le porzioni di ogni elica $p\Psi(L)$ che hanno origine e fine in M (figura (3.4)).

Supporremo per assurdo che gli insiemi A_k siano misurabili.

Per ogni intero $k \in \mathbb{Z}$, definiamo l'insieme:

$$L^{(k)} = \left\{ (\alpha t, \beta t) \mid \frac{k}{\alpha} \leq t < \frac{k+1}{\alpha} \right\}.$$

Osserviamo che gli insiemi $L^{(k)}$ sono a due a due disgiunti; sono semplicemente degli intervalli semiaperti sulla retta L . Di fatto, essi rappresentano le parti della retta L racchiuse dalle rette verticali M_k consecutive. Indichiamo gli insiemi corrispondenti sul toro \mathbb{T}^2 con $\Psi(L^{(k)})$ e per ogni intero $k \in \mathbb{Z}$, sia $A_k = \bigcup_{p \in \Lambda} p\Psi(L^{(k)})$. Allora possiamo osservare che:

$$\mathbb{T}^2 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k.$$

Per costruzione, i sottoinsiemi A_k del toro \mathbb{T}^2 sono a due a due disgiunti, congruenti a coppie e numerabili.

Concludendo, possiamo affermare che gli insiemi A_k non possono essere misurabili. Infatti, se lo fossero dovrebbero avere tutti la stessa misura e sfruttando la proprietà di additività numerabile della misura di Lebesgue, risulterebbe che:

$$|\mathbb{T}^2| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |A_k|.$$

Ma poiché la misura del toro \mathbb{T}^2 è un numero positivo, essa non può essere ottenuta come somma di infinite misure tutte uguali tra loro.

Bibliografia

- [1] ANEDDA C., *Misura e integrale di Lebesgue (Appunti A.A. 2012/2013)*, appunti interni reperibili al link <http://people.unica.it/claudiaanedda/files/2014/05/Misura-e-L-integrale-corretto.pdf> (Marzo 2017).
- [2] BURK F., *A Lebesgue measure and integration: An introduction. Appendix B. A Lebesgue Nonmeasurable Set*, John Wiley & Sons, (1998).
- [3] CADDEO R. GRAY A., *Lezioni di Geometria differenziale. Curve e superfici*, Volume 1, CUEC, Cagliari (2001).
- [4] CERLIENCO L., *Rudimenti di Algebra astratta. Versione riveduta e corretta di vecchi appunti preparati in collaborazione con F. Piras*, appunti interni del corso di Algebra 2 (Anno Accademico 2010/2011).
- [5] GORNI G., *La misura di Lebesgue*, Università di Udine, materiale reperibile al link <https://users.dimi.uniud.it/gianluca.gorni/Dispense/misuraDiLebesgue.pdf> (Marzo 2017).
- [6] KIERUS A., *Some non measurable sets*, in "*Folia Mathematica*" Vol. 17, No. 1, 2010, pp. 3-10
- [7] LOI A., *Appunti per un corso di topologia della laurea triennale*, appunti interni del corso di Geometria 3 (Anno Accademico 2012/2013).
- [8] MADERNA C., SOARDI P. M., *Complementi di analisi*, disponibile online al link

- <https://www.yumpu.com/it/document/view/43013428/maderna-soardi-complementi-di-analisi-matematica-e-applicazioni> (Marzo 2017).
- [9] MASCHIO S., *Note di teoria della misura*, materiale reperibile al link <http://www-dimat.unipv.it/pier/teaching/disp-maschio> (Marzo 2017).
- [10] PAGANI C. D., SALSA S., *Analisi matematica*, Volume 2, Zanichelli, Milano (1991).
- [11] WATSON S., WAYMAN A., *Visualizing a Nonmeasurable Set*, in "*Mathematics Magazine*" Vol. 76, No. 2, Aprile 2003, pp. 137-140
- [12] <http://www.math3ma.com/mathema/2015/8/17/a-non-measurable-set> (Marzo 2017).
- [13] <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Vitali.html> (Marzo 2017).
- [14] <http://wirksworthii.nottingham.ac.uk/webcast/maths/Measure-Theory/PDF/FTA-Section3.9.pdf> (Marzo 2017).