Università degli Studi di Cagliari

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Matematica

La Trasformata di Fourier Discreta

e sue applicazioni

Relatore:

Prof. Lucio Cadeddu

Tesi di Laurea :

Giorgia Tranquilli

Grazie allo sviluppo in serie di Fourier si possono scomporre funzioni tramite serie di funzioni trigonometriche.

Definizione

Si chiama *serie di Fourier* una serie del tipo

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\cos(2\pi nx/T)+b_n\sin(2\pi nx/T)\right]$$

dove

$$a_n=2/T\int_0^T f(x)\cos(2\pi nx/T)\,dx \qquad b_n=2/T\int_0^T f(x)\sin(2\pi nx/T)\,dx$$

Joseph Fourier nel trattato “ *Théorie analytique de la chaleur* “ (1822) sviluppò un'importante trasformata integrale detta Trasformata di Fourier

Definizione

L'integrale di Fourier è definito dall'espressione

$$H_{h(t)}(f)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

Se tale integrale esiste per ogni valore del parametro f, allora la formula precedente definisce **H(f)** come la **Trasformata di Fourier** di h(t)

Osservazione:

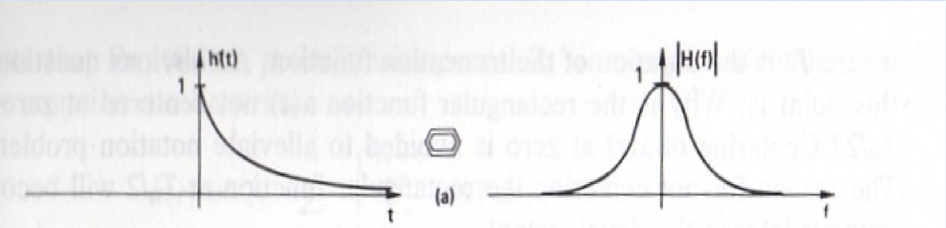
La trasformata di Fourier, così come è stata definita, non può essere facilmente sottoposta ad una computazione digitale.

Di conseguenza si è introdotto un nuovo operatore che prende il nome di **trasformata di Fourier discreta,** la quale richiede un numero finito di operazioni.

Per “discretizzare” la Trasformata di Fourier le modifiche richieste sono:

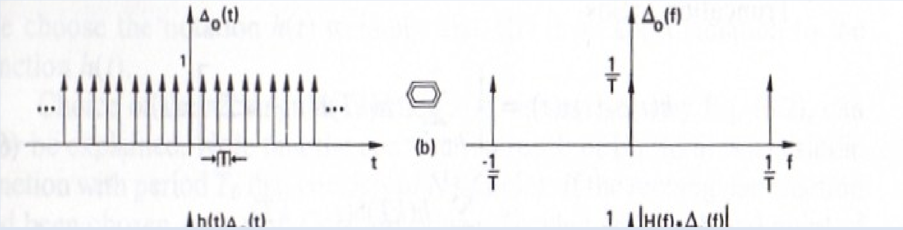
- Campionamento nel *dominio di tempo*
- Troncamento
- Campionamento nel *dominio di frequenza*

Considerata la forma d'onda h(t) e la sua trasformata H(f)



Campioniamo la forma d' onda h(t) tramite la funzione $\Delta_0(t)$

(funzione campionamento dominio di tempo) illustrata in figura

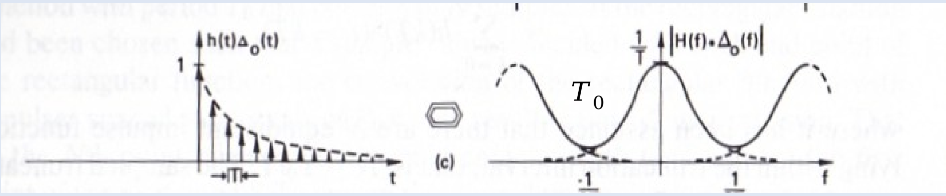


Il cui intervallo di campionamento è T

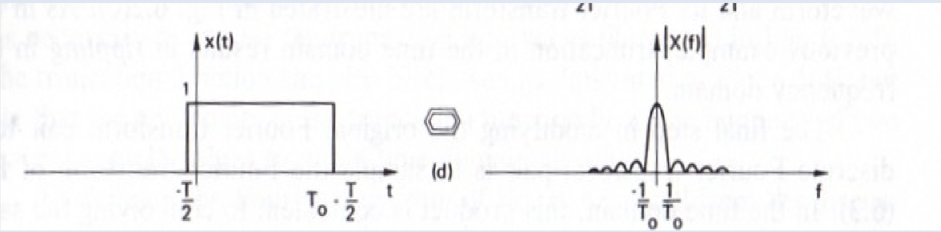
La funzione campionata può essere scritta:

$$h(t)\Delta_0(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT)\delta(t-kT)$$

il risultato di tale moltiplicazione è illustrato



Per troncare la funzione moltiplichiamo quest'ultima per la funzione rettangolare x(t)

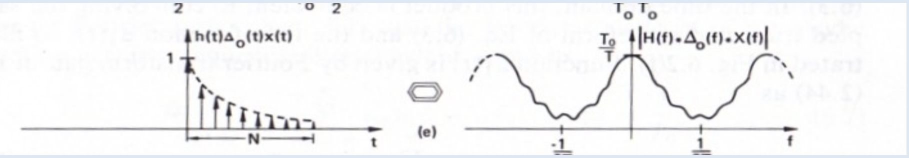


Il troncamento produce:

$$h(t)\Delta_{\{0\}}x(t)=[\sum_{k=\infty}^{-\infty} h(kT)\delta\,(t-kT)]x(t)=\sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta\,(t-kT)$$

dove assumiamo che vi siano N funzioni impulso equidistanti nell'intervallo di troncamento

La forma d'onda campionata e troncata e la sua trasformata sono illustrate in figura



Per compiere l'ultimo passo consideriamo la funzione Δ_1

$$\Delta_1(t)=T_0\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta(t-rT)$$

La relazione desiderata è data:

$$\left[h(t)\Delta_0(t)x(t)\right]*\Delta_1(t)=\left[\sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta(t-kT)\right]*\left[T_0\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta(t-rT)\right]$$

La quale in forma compatta può essere scritta

$$h^{\circ}=T_0\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta(t-kT-rT_0)\right]$$

Tale funzione è illustrata in figura

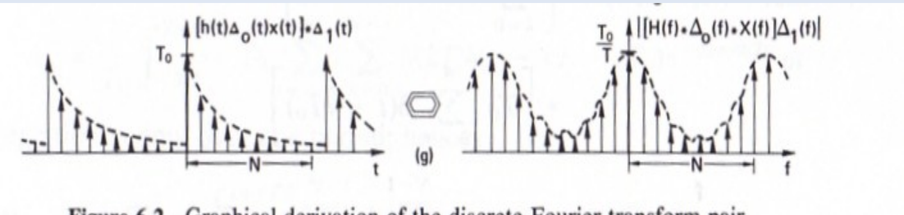


Figure 6.2 Graphical derivation of the discrete Fourier transform pair.

Ora possiamo calcolare la trasformata di h°(t)

ricordando la formula

$$H°(n/T_0)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n\delta(f-nf_0)$$ dove $f_0=1/T_0$

dove

$$\alpha_n=1/T_0\int_{-T/2}^{T_0-T/2}h°(t)e^{-j2\pi nt/T_0}dt$$

sostituendo e ricordando che $T_0=NT$ troviamo che

$$\alpha_n=\sum_{k=0}^{N-1}h(kT)e^{-j2\pi kn/N}$$

n=0,+1,-1,...

La trasformata di Fourier h°(t) diventa

$$H°\left(n/NT\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{N-1}h\left(kT\right)e^{-j2\pi kn/N}$$

notando che H°(n/NT) è periodica di periodo N

allora l'equazione può essere riscritta

$$H°\left(n/NT\right)=\sum_{k=0}^{N-1}h\left(kT\right)e^{-j2\pi kn/N}$$

n=0,1,...,N-1

Essa rappresenta la nostra TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA

Definizione

L' **inversa trasformata di Fourier discreta** è data dalla formula

$$g(kT)=1/N\sum_{n=0}^{N-1}G(n/NT)e^{j2\pi nk/N}$$

con k= 0,1,...,N-1

Proprietà

- **Linearità**

$$x(t) + y(t) \quad \Leftrightarrow \quad X(n)+Y(n)$$

- **Simmetria**

$$1/N\ H(k) \quad \Leftrightarrow \quad h(-n)$$

- **Traslazione nel tempo**

$$h(t-t_o) \quad \Longleftrightarrow \quad H(n)=e^{-j2pint_0/N}$$

Proprietà

- **Traslazione in frequenza**

$$h(k)e^{j2\pi ik/N} \Leftrightarrow H(n-i)$$

- **Funzione pari**

La trasformata di Fourier discreta di una funzione pari è pari e reale

- **Funzione dispari**

La trasformata di Fourier discreta di una funzione dispari è dispari e immaginaria

Proprietà

- **Formula dell'inversione alternativa**

La formula dell' inversione discreta

$$g(kT)=1/N\sum_{n=0}^{N-1}G(n/NT)e^{j2\pi nk/N}$$

può essere anche scritta come

$$h(t)=1/N\left[\sum_{k=0}^{N-1}H^{*}e^{-j2\pi nk/N}\right]^{*}$$

dove con * indichiamo la coniugazione

Proprietà

- **Proprietà Time-Convolution**

$$\sum_{i=0}^{N-1} x(i)h(k-i) \Leftrightarrow X(n)H(n)$$

dove la convoluzione discreta è definita come

$$x(i)*h(k)=\sum_{i=0}^{N-1} x(i)h(k-i)$$

- **Proprietà Frequency-Convolution**

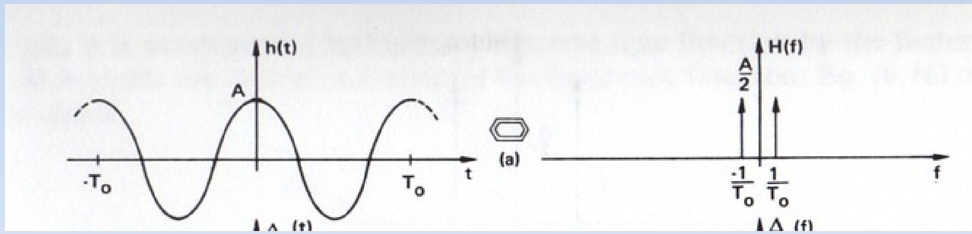
$$x(k)h(k) \Leftrightarrow 1/N \sum_{i=0}^{N-1} X(i)H(n-i)$$

dove la convoluzione di frequenza è data

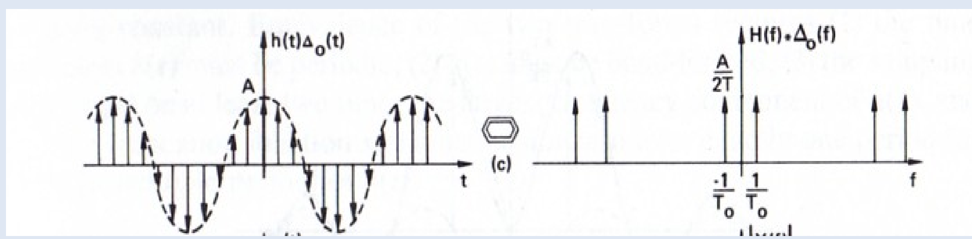
$$Y(n)=\sum_{i=0}^{N-1} X(i)H(n-i)$$

Applicazione

Consideriamo la funzione a banda limitata h(t) e la sua trasformata

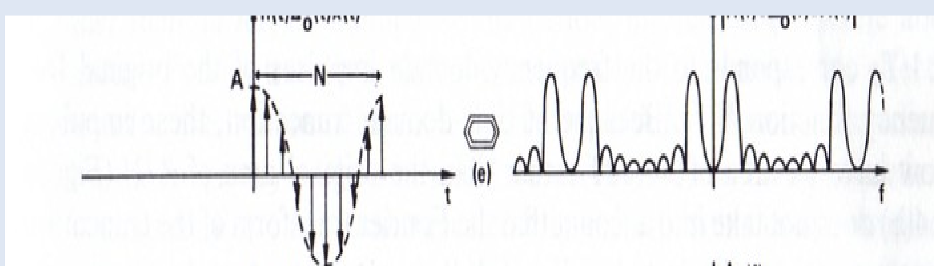


La forma d'onda campionata h(kT) e la sua trasformata sono

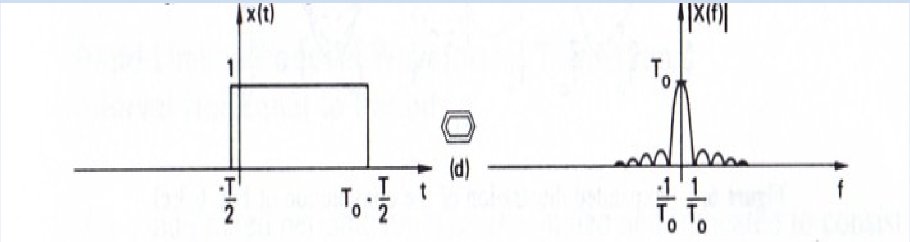


Nota:Il dominio di frequenza è scalato di un fattore 1/T

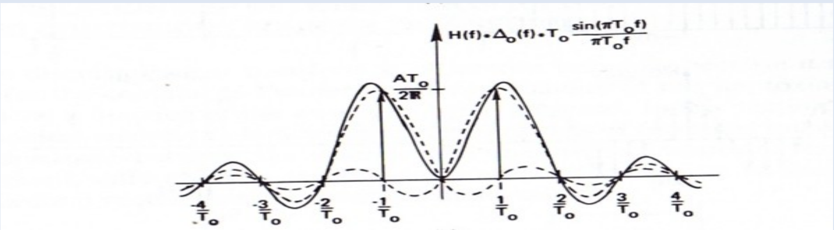
Dopo il troncamento la forma d'onda campionata e troncata sarà



La trasformata di Fourier della forma d' onda precedente è ottenuta convolvendo le funzioni impulso nel dominio della frequenza con la funzione [sin(f)]/f della figura

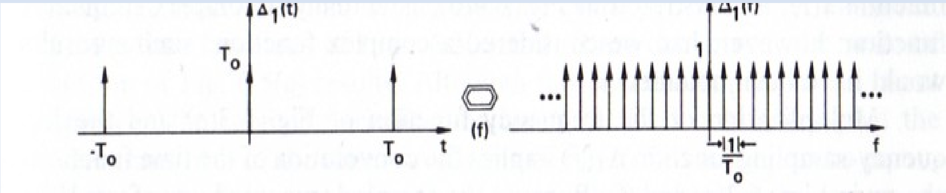


Una visione particolareggiata della convoluzione è data in figura

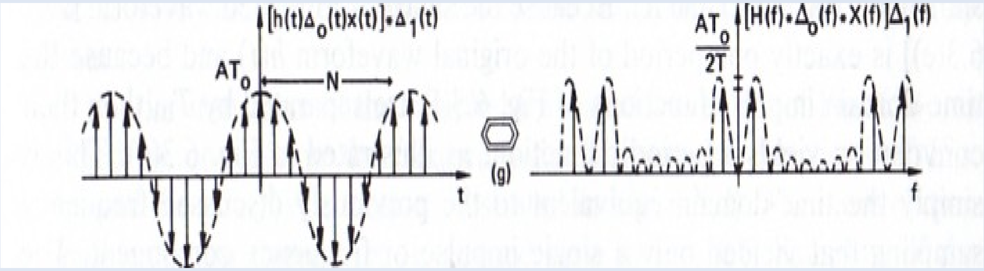


dove la linea tratteggiata indica la funzione [sin(f)]/f centrata in ogni impulso, la linea continua indica, invece, le forme d' onda risultanti per formare la convoluzione cercata

Tra la trasformata originale H(f) e la trasformata rappresentata nella figura precedente abbiamo distorsione; essa, però, viene eliminata campionando con la funzione frequenza in figura



Applicando la convoluzione tra la funzione $\Delta_1(f)$ e la forma d'onda campionata e troncata otteniamo la funzione periodica



Analizzando tale funzione notiamo che la nostra funzione tempo è stata campionata moltiplicando ogni campione per T_0

Se vogliamo computare la trasformata di Fourier per mezzo della trasformata discreta dobbiamo moltiplicare la funzione tempo discreta per un fattore T(in modo che l'area della funzione frequenza sia A/2). Allora l'equazione della trasformata diventa

$$H(n/NT) = T \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-j2\pi nk/N}$$

Questo esempio rappresenta l'unica classe di funzioni per le quali la trasformata discreta e quella continua sono equivalenti, scalate di fattore costante

L' equivalenza delle due trasformate richiede:

- Periodicità della funzione tempo h(t)
- La funzione h(t) deve essere a banda limitata
- Il passo di campionanamento deve essere almeno due volte la più grande componente di frequenza della h(t)
- La funzione troncamento x(t) deve essere diversa da zero su un periodo di h(t)

Osservazione conclusiva

La trasformata di Fourier discreta può essere impiegata per derivare risultati essenzialmente equivalenti alla trasformata di Fourier continua.

Il concetto più importante da ricordare è che la trasformata di Fourier discreta implica periodicità sia nel dominio di tempo che nel dominio di frequenza.