



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

**CRITICA MARXIANA
DEI
FONDAMENTI
DEL
CALCOLO DIFFERENZIALE**

Relatore:

Prof. LUCIO CADEDDU

Tesi di laurea:

VALERIA MASCIA

INDICE

1. Introduzione	3
2. Cenni biografici di Karl Marx	5
3. Sul concetto di funzione derivata	8
4. Sul differenziale	20
5. Sulla storia del calcolo differenziale	43
6. Cenno all'Analisi Non-Standard	53
7. Conclusione	57
8. Bibliografia	58

1. INTRODUZIONE

L'argomento di questa tesi è l'Analisi dei “ Manoscritti matematici” di Karl Marx. Scritti nel 1881, pubblicati per la prima volta a Mosca in traduzione russa nel 1933, contengono i lavori *Sul concetto di funzione derivata* e *Sul differenziale*, oltre a diversi abbozzi e aggiunte, che rappresentano l'interpretazione di Marx del calcolo differenziale, che sta alla base di tutta l'Analisi infinitesimale che si è potuta sviluppare dal XVIII secolo, inizialmente ad opera di Newton e Leibniz.

Marx fu principalmente un filosofo ed economista ed è così che ci viene presentato nella maggior parte delle biografie.

Solo alcune citano questo immenso lavoro di matematica e il fatto che negli ultimi anni della sua vita Marx si sia dedicato allo studio di alcune discipline scientifiche.

Tale lavoro di Marx è infatti collocabile all'interno di un'indagine di matematica pura.

Il suo interesse per la matematica risale agli anni '40, ma solo qualche anno prima di morire si dedicò sistematicamente alla matematica ed in particolare al calcolo differenziale.

Gli studi matematici degli anni '70 e '80 sono collegati agli studi sull'economia politica ed in particolare alla stesura de *Il Capitale*.

In una lettera al suo amico Engels, dell'11 gennaio 1858, Marx scriveva:

“... mi trovo talmente imbrogliato con degli errori di calcolo, che mi sono messo di nuovo a studiare l'Algebra. L'Aritmetica mi è sempre stata ostica. Ma per la via traversa dell'Algebra mi rimetto rapidamente a posto” [*Opere di Marx ed Engels*, vol.XL, Roma 1973, pag.269]

Di qui la necessità di sviluppare il calcolo differenziale che Marx utilizzava appunto nella sua teoria economica. Per lui era importante, infatti, non solo poterlo utilizzare così come era stato presentato dai matematici precedenti, ma perfezionarlo facendo emergere i suoi sviluppi algebrici.

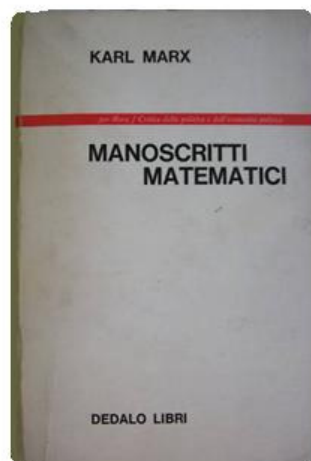
Non solo, probabilmente l'interesse matematico emerse anche in seguito alla lettura della *Scienza della logica di Hegel* in cui viene estesamente trattato il problema del calcolo differenziale.

Marx prestò attenzione allo sviluppo storico dell' analisi del periodo e cercò di fondare in modo “ non mistico” il calcolo infinitesimale, come invece lui riteneva fosse stato trattato fino ad allora. I manoscritti infatti si sviluppano partendo dal concetto di derivata, per il

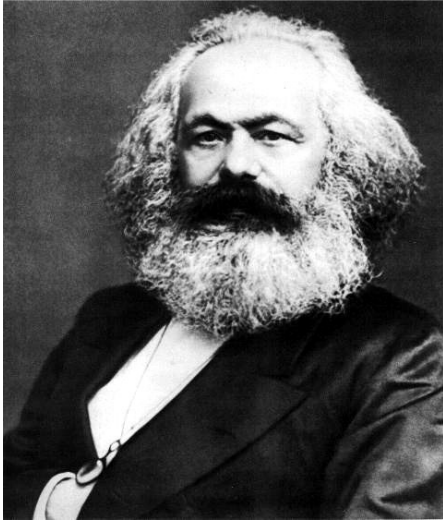
quale Marx illustra il metodo da lui scoperto, per poi fare dei confronti con quattro matematici del periodo: a partire da Newton e Leibniz, autori di “un calcolo differenziale mistico” fino al metodo “razionalistico” di D’Alembert e infine gli sviluppi di Lagrange attraverso un “metodo puramente algebrico”.

Tale opera ha quindi per contenuto una discussione critica sul calcolo differenziale ed una ricostruzione dell’intero calcolo su basi algebriche e dialettiche: Marx vuole svelare dialetticamente tutti i passaggi algebrici che portano all’operazione differenziale effettiva.

I *Manoscritti matematici* possono essere riguardati almeno sotto tre aspetti: in primo luogo, in riferimento alla teoria e alla storia del calcolo differenziale. In secondo luogo, in riferimento alla complessa problematica della dialettica: viene analizzato infatti il processo della *negazione della negazione* che sta alla base dell’operazione differenziale. In terzo luogo i manoscritti rappresentano il luogo di elaborazione, sviluppo e perfezionamento dell’impalcatura matematica dell’analisi economica marxiana e da qui la necessità di scrivere appunto i primi due saggi “Sul concetto di funzione derivata” e “Sul differenziale”. Analizzerò nelle pagine seguenti l’opera di Marx (in riferimento alla prima traduzione italiana e alla stampa del 1975) riportando i suoi sviluppi e gli esempi significativi per capire la sua posizione nella storia del calcolo infinitesimale e mi riferirò talvolta all’introduzione del libro stesso, curata da Francesco Matarrese e Augusto Ponzio .



2. KARL MARX (5 Maggio 1818 / 14 Marzo 1883)



Karl Heinrich Marx è stato un filosofo, economista e rivoluzionario tedesco.

Fu fondatore del comunismo scientifico, insegnante e leader del proletariato internazionale. I suoi insegnamenti hanno rivelato le leggi dello sviluppo sociale e ha mostrato all'umanità la strada per il rinnovo comunista del mondo.

In Marx ritroviamo la combinazione tra le qualità di un geniale pensatore che ha rivoluzionato le scienze sociali e quelle di un tenace combattente rivoluzionario che ha contribuito a trasformare il movimento dei lavoratori "in una forza potente per il progresso sociale".

Nato a Treviri da un avvocato di origine ebraica, fu proprio il padre che ebbe un influsso considerevole sulla sua formazione intellettuale e Marx, fin da ragazzo, venne così a contatto con le idee degli illuministi francesi e tedeschi, ricevendo un'educazione di stampo razionalistico e liberale.

Nel 1830 si iscrisse al Liceo di Treviri ottenendo così la licenza il 17 Agosto 1835. In questo stesso anno si iscrisse, sotto consiglio del padre, alla facoltà di Giurisprudenza all'Università di Bonn, ma nel 1836 proseguì i suoi studi, su decisione della famiglia, all'Università di Berlino, dove fino a cinque anni prima aveva insegnato Hegel, del quale poi divenne seguace.

Nel 1841 si laureò in filosofia con la tesi “La differenza tra la filosofia della natura di Democrito e quella di Epicuro”, nella quale emerge già la concezione secondo cui la filosofia deve prendere parte nella vita comune.

Abbandonò i progetti di carriera universitaria, in seguito alla politica sempre più reazionaria del governo prussiano.

Marx sosteneva che l'attività politica e giornalistica fossero il mezzo migliore per manifestare e realizzare gli ideali della filosofia progressista.

Fu intorno al 1842 che iniziò a pubblicare articoli di carattere politico-filosofico, diventando redattore capo del giornale. Il suo talento organizzativo e le sue doti letterarie, fecero del giornale il mezzo di diffusione delle sue idee rivoluzionarie-democratiche.

Il desiderio di capire meglio la condizione delle masse lavoratrici e la conseguente linea rivoluzionaria che seguì nella “Gazzetta renana” , portarono alla censura e Marx nel 1843 fu costretto a dimettersi dal ruolo di direttore.

Nell'opera “Critica della filosofia hegeliana del diritto pubblico” viene individuato il suo distacco dal pensiero hegeliano ed emerge la sua idea secondo cui una teoria della società è possibile solo mettendo da parte ogni idea generale ed analizzando invece la società materialmente determinata.

In quest'anno si sposò con Jenny von Westphalen, una giovane appartenente all'antica aristocrazia renana, compagna preziosa di tutta la sua vita.

Nell'Ottobre del 1843 si trasferì a Parigi, con l'intenzione di pubblicare un giornale socio-politico. La sua esperienza si arricchì dal contatto diretto con tradizioni rivoluzionarie del proletariato francese e con le organizzazioni dei lavoratori e dei circoli democratici e socialisti, tra cui gruppi di emigrati russi. A Parigi, Marx ha intrapreso il suo primo esame critico delle basi economiche della società borghese. Dopo aver annunciato che “l'anatomia della società civile deve essere cercata nell'economia politica” , Marx iniziò a studiare l'economia. Nel 1844 Marx espose il risultato delle sue ricerche nell'opera “Manoscritti economico-filosofici” , nella quale rivelò il carattere antagonistico della struttura economica della società capitalista. Qui introdusse il concetto di “lavoro alienato” per descrivere la posizione dei proletari in una società di sfruttamento, mostrando che la rivoluzione proletaria sarebbe stata il modo per abolire la proprietà privata e la creazione di una società senza più un'alienazione lavorativa.

Il primo frutto della collaborazione di Marx e del suo amico Friedrich Engels fu “La sacra famiglia o Critica della critica critica”, nella quale emergono l'idealismo dello sviluppo del pensiero filosofico e la necessità di conciliare il materialismo con la dialettica.

Nel 1845 venne espulso dalla Francia, su insistenza del governo prussiano. Si trasferì a Bruxelles insieme ad Engels, dove portarono avanti il loro lavoro di critica pubblicando nuovi articoli. Invece, il manoscritto “L’ideologia tedesca” venne pubblicato solo nel 1932 poiché non riuscirono a trovare un editore disponibile.

Nei primi mesi del 1847 il leader della Lega dei Giusti (società che raccoglieva adesioni soprattutto fra gli emigrati politici tedeschi) propose a Marx ed Engels una riorganizzazione della Lega. Entrambi parteciparono al secondo congresso della Lega dei comunisti che si tenne a Londra in Dicembre dello stesso anno, il cui risultato fu la pubblicazione del “Manifesto del partito comunista”, nel febbraio 1848, il primo documento teorico-programmatico del comunismo scientifico, nel quale si analizza la forma sociale borghese come prodotto di un lungo processo storico.

La rivoluzione del 1848-49 è stata la prima prova storica del marxismo.

Espulso dal Belgio, ritornò a Parigi per poi trasferirsi nuovamente in Germania dove divenne direttore della Nuova Gazzetta Renana che manifestò il suo spirito rivoluzionario. Nel 1849 Marx partì per la Gran Bretagna, costretto a lasciare Parigi, dove si era recato nello stesso anno. Qui continuò ancora la sua attività politica nella speranza di creare il partito proletario, soprattutto dopo la crisi economica del 1857.

Nel 1858 si ha la pubblicazione di “Una critica dell’economia politica”, il primo progetto de “Il capitale”, nel quale Marx espose l’essenza della sua scoperta più importante, la teoria del plusvalore. La sua attività economico-politica continuò con la pubblicazione dei “Manoscritti Economici del 1861-1863” (più di 200 quaderni), nei quali trattò scientificamente il costo di produzione e il profitto medio. E’ in questo periodo che continuò il lavoro su “Il capitale”. Negli ultimi anni della sua vita, Marx continuò lo sviluppo e il perfezionamento della teoria rivoluzionaria, formando partiti proletari in vari paesi e contribuendo a rafforzare i legami fra loro. Dedicò ancora del tempo all’economia, ma si occupò anche di scienze naturali, in particolare la chimica, chimica agraria, geologia, biologia ed infine scrisse nel 1881 “Manoscritti matematici”, sul calcolo differenziale. In questi anni la salute di Marx iniziò a peggiorare. Fu un duro colpo per lui anche la morte della moglie nel 1881 e della figlia primogenita in Gennaio del 1883. Nello stesso mese si ammalò di bronchite e seguirono altre complicazioni.

Morì a Londra il 14 Marzo del 1883.

3. SUL CONCETTO DI FUNZIONE DERIVATA [pag.45]

In questo capitolo Marx presenta la derivata di una funzione e ne illustra il calcolo algebrico, in modo da giustificare le sue origini. Egli vuole infatti mostrare che i simboli di derivazione nascono attraverso passaggi algebrici effettivi e non sono invece posti fin dall'inizio senza giustificazione.

L'importanza dell'algebra per Marx era dovuta al fatto che, come branca della matematica che si occupa dello studio di relazioni e quantità, è la disciplina più adatta a spiegare il calcolo differenziale.

“ Se la variabile indipendente cresce da x a x_1 , allora la variabile dipendente cresce da y a y_1 . Qui viene considerato il caso semplicissimo in cui x appare alla prima potenza.

1) $y = ax$; se x cresce fino al valore x_1 , allora

$$y_1 = ax_1$$

e

$$y_1 - y = a (x_1 - x).$$

Se ora avesse luogo l'operazione differenziale, se cioè facessimo diminuire x_1 fino a x , allora risulterebbe

$$x_1 = x; \quad x_1 - x = 0,$$

quindi

$$a (x_1 - x) = a \cdot 0 = 0.$$

Inoltre, siccome y è diventata y_1 , soltanto perché x è diventata x_1 , parimenti si otterrebbe ora

$$y_1 = y; \quad y_1 - y = 0.$$

Quindi

$$y_1 - y = a (x_1 - x)$$

si trasforma in $0 = 0$.

Porre prima la differenziazione e poi annullarla di nuovo porta dunque letteralmente al *nulla*. Tutta la difficoltà della comprensione nell'operazione differenziale (come in generale in quella della *negazione della negazione*) sta proprio in ciò: nel vedere come essa si distingue da una semplice procedura di questo tipo e conduce a risultati effettivi.”

Per Marx il calcolo differenziale si sviluppa attraverso il processo della negazione della negazione, cioè dialettico.

Inizialmente quindi le variabili devono crescere, perché si abbia una variazione. Solo successivamente, “perché si abbia l'operazione differenziale”, la variabile x_1 deve diminuire fino al suo valore iniziale e conseguentemente la variabile y_1 che dipende da essa. Per un pensatore come Marx, influenzato dalla filosofia hegeliana, questo tipo di ragionamento logico era familiare: si parte da un valore (tesi), lo si altera, o dialetticamente lo si “nega”(antitesi), quindi si nega la negazione e il risultato (sintesi) ci riconduce nuovamente alla tesi. E' questo il discorso che sta alla base del concetto di derivata: si aumenta il valore della variabile indipendente, diciamo da x a $x+h$, e quindi si studia il comportamento del rapporto fra le quantità $f(x+h)-f(x)$ e $(x+h)-(x)$, cioè h , allorché h è prossimo a zero, ossia $x+h$ “ritorna” a x .

Quindi l'obiettivo di Marx è mostrare come questo processo, che non porterebbe da nessuna parte in quanto l'operazione iniziale viene annullata successivamente, in realtà conduce a risultati effettivi.

Il punto di vista di Marx è quindi *materialistico storico-dialettico*. In primo luogo si differenzia da Hegel perché tratta il calcolo attraverso risultati “effettivi” e non “evanescenti”, ed è storico poiché giunge a tali conclusioni solo dopo aver analizzato il *calcolo mistico* di Newton e Leibniz.

$$\dots y_1 - y = a (x_1 - x)$$

Se dividiamo $a (x_1 - x)$, e in corrispondenza anche il secondo membro dell'equazione, per il fattore $x_1 - x$, otteniamo:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a.$$

y , poiché è la variabile dipendente, non può in generale compiere nessun movimento indipendente. Perciò y_1 non può diventare uguale a y , e quindi neppure $y_1 - y = 0$, senza che prima x_1 non sia divenuta uguale a x .

D'altra parte abbiamo visto che x_1 non poteva diventare uguale a x nella funzione $a (x_1 - x)$, senza rendere quest'ultima uguale a 0.

Il fattore $x_1 - x$ era perciò *necessariamente* una differenza *finita*, nel momento in cui entrambi i membri dell'equazione venivano divisi per esso.

Nel momento in cui si pone il rapporto

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

$x_1 - x$ è perciò sempre una differenza finita; di conseguenza

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

è un *rapporto di differenze finite*, e conformemente a ciò:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Quindi:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oppure } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a,$$

dove la costante a figura come *valore limite* del rapporto delle differenze finite delle due variabili.

Poiché a è costante, essa non può subire alcuna variazione, e quindi neppure può subirla il *secondo membro* dell'equazione ad essa ridotto. In tali circostanze, il *processo differenziale* si svolge al primo membro che è

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oppure } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

e questa è una particolarità di funzioni semplici del tipo di ax .

Se x_1 decresce nel denominatore del rapporto, allora essa si avvicina a x ; il limite della sua diminuzione è raggiunto, non appena diventa x . Con ciò la differenza $x_1 - x$ è posta uguale a $x - x = 0$ e perciò anche $y_1 - y = y - y = 0$. Otteniamo così:

$$\frac{0}{0} = a.$$

Poiché nell'espressione $\frac{0}{0}$ è cancellata ogni traccia della sua origine e del suo significato,

sostituiamo tale espressione con $\frac{dy}{dx}$, dove le differenze finite $x_1 - x$ ovvero Δx , e $y_1 - y$

ovvero Δy appaiono simbolizzate come *differenze abolite* o *scomparse*, ovvero $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ trapassa in

$$\frac{dy}{dx}.$$

Quindi:

$$\frac{dy}{dx} = a.$$

La consolazione a cui si aggrappano alcuni matematici razionalizzanti, cioè che dy e dx siano di fatto soltanto infinitamente piccoli e che il loro rapporto sia solo

approssimativamente $\frac{0}{0}$ è una chimera.

Una particolarità del caso in questione che resta da menzionare è che $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ e così pure

$\frac{dy}{dx} = a$, e che perciò il valore limite delle differenze finite è anche al tempo stesso il valore limite del rapporto dei differenziali.

2) Un secondo esempio dello stesso caso è

$$y = x; \quad y_1 = x_1;$$

$$y_1 - y = x_1 - x;$$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ ovvero } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1; \frac{0}{0} \text{ ovvero } \frac{dy}{dx} = 1."$$

L'obiettivo per Marx è giungere al simbolo differenziale $\frac{dy}{dx}$ attraverso un rigoroso sviluppo algebrico, a differenza di quanto era avvenuto nel secolo precedente. Sia Newton che Leibniz erano giunti ad esso (indipendentemente) senza rendere conto *algebricamente* della sua origine. Ciò costituiva un'evidente scorrettezza, in quanto si rivelava così il carattere mistico e idealista del simbolo.

Quello che fa Marx e che verrà messo in evidenza anche negli esempi successivi è distinguere tra il *simbolo dell'operazione* e il *processo reale*.

Mentre nel secolo precedente, il *simbolo differenziale* veniva considerato a priori ed esisteva come ente matematico "metafisico", per Marx prima deve esistere il *processo reale* di derivazione che diventa così il punto di partenza, al quale viene accostato il simbolo differenziale, che deriva da esso.

"Poiché $y = f(x)$, la funzione di x , però nella sua *espressione algebrica esplicita*, si trova a secondo membro dell'equazione, chiamiamo questa espressione la *funzione originaria di x* ; chiamiamo la sua prima modificazione, ottenuta per differenziazione, la *funzione "derivata" provvisoria di x* ; e chiamiamo la forma ottenuta alla fine del *processo differenziale* la *funzione "derivata" di x* .

$$3) y = ax^3 + bx^2 + cx - e.$$

Se x cresce fino a x_1 , allora

$$y_1 = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 - e,$$

$$y_1 - y = a(x_1^3 - x^3) + b(x_1^2 - x^2) + c(x_1 - x) =$$

$$a(x_1 - x)(x_1^2 + x_1x + x^2) + b(x_1 - x)(x_1 + x) + c(x_1 - x).$$

Perciò

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ ovvero } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a(x_1^2 + x_1x + x^2) + b(x_1 + x) + c.$$

La “derivata” provvisoria

$$a(x_1^2 + x_1x + x^2) + b(x_1 + x) + c$$

è qui il *valore limite* del *rapporto* delle differenze finite: cioè per quanto piccole possano essere prese queste differenze, il valore di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ è dato in quella “derivata”.

Se nella funzione

$$a(x_1^2 + x_1x + x^2) + b(x_1 + x) + c$$

la variabile x_1 decresce fino a raggiungere il *limite* della sua diminuzione, cioè fino a divenire *uguale* a x , x_1^2 si trasforma in x^2 , x_1x in x^2 , e $x_1 + x$ in $2x$ e noi otteniamo la *funzione “derivata”* di x :

$$3ax^2 + 2bx + c.$$

Qui si mostra chiaramente:

Primo: per ottenere la derivata si deve porre $x_1 = x$, quindi in senso *strettamente* matematico $x_1 - x = 0$, lasciando perdere le frottole di una approssimazione soltanto infinita.

Secondo: per il fatto che $x_1 = x$ e dunque $x_1 - x = 0$, non interviene assolutamente nulla di simbolico nella derivata. La grandezza x_1 , introdotta all’origine per variazione di x non scompare; essa viene soltanto *ridotta* al suo valore limite minimo, e rimane un elemento nuovo introdotto nella funzione originaria di x , il quale, attraverso le sue combinazioni in parte con se stesso, in parte con la x della funzione originaria, fornisce la “derivata” definitiva, cioè la “derivata” *provvisoria ridotta alla sua grandezza minima*.

In

$$\frac{0}{0} \text{ ovvero } \frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c,$$

la *derivata* appare come *valore limite* del rapporto dei differenziali.

La disgrazia trascendentale o simbolica avviene solo a primo membro, ma ha già perduto il suo orrore, dal momento che appare solo come espressione di un processo che ha già mostrato il suo effettivo contenuto al secondo membro dell’equazione.”

Osserviamo come Marx distingue tra la derivata provvisoria e la derivata definitiva. Il simbolo differenziale $\frac{dy}{dx}$ compare soltanto alla fine di tutto il processo algebrico che lui segue per arrivare al calcolo della derivata. In questo modo arriva a mostrare che il processo della negazione della negazione porta ad un risultato effettivo, che è proprio la derivata. Nel calcolo, che lui chiama “mistico”, si perveniva a risultati esatti ma attraverso procedimenti “errati”, non fondati scientificamente. Perciò spiegare l’operazione differenziale attraverso la negazione della negazione, permette a Marx di liberare questo calcolo differenziale dalle nozioni oscure, dai falsi presupposti ed arrivare così a dare di esso una fondazione rigorosa. Vediamo in cosa consiste.

Inizialmente la variabile indipendente cresce e di conseguenza anche la variabile dipendente, perciò il rapporto tra questi incrementi finiti ci dà una derivata provvisoria. In un secondo momento, quando questi incrementi vengono fatti decrescere, al secondo membro si ottiene il valore effettivo della derivata mentre al primo membro rimane il rapporto $\frac{0}{0}$ che è solo una rappresentazione del secondo membro. La derivata rappresenta il valore limite del rapporto dei differenziali e quindi tale simbolo è espressione di questo fatto. Esso è conseguenza di un processo che ha condotto ad un risultato effettivo e non trascendente.

Marx in questo modo mostra come in $\frac{dy}{dx}$ risulta la genesi e che questo rappresenti un modo differente per esprimere il rapporto $\frac{0}{0}$. Quest’ultima scrittura, infatti, evidenzia soltanto l’aspetto *quantitativo*, cioè che numeratore e denominatore si sono annullati e che quindi si è annullato il loro rapporto, ma quello che non emerge (e che invece uno dovrebbe ricordare) è l’aspetto *qualitativo* che dice che *lo zero al numeratore è solo una conseguenza dello zero al denominatore*, una conseguenza cioè della dipendenza della funzione dalla grandezza variabile di cui è funzione.

$\frac{dy}{dx}$ perciò non è soltanto un simbolo di $\frac{0}{0}$ ma è un simbolo del processo da cui questo ha avuto origine, pertanto non può essere dato a priori senza giustificazione come veniva presentato nell’Analisi del ‘700.

Attraverso l’esame del processo di sviluppo di $\frac{0}{0}$, che trova in $\frac{dy}{dx}$ la sua espressione, si perviene perciò al risultato $\frac{0}{0} = f'(x)$ e non $\frac{0}{0} = 0$.

“... Tale derivata $3ax^2 + 2bx + c$ può da parte sua presentarsi essa stessa di nuovo come una funzione originaria e diventare madre di un'altra “derivata” attraverso un nuovo processo differenziale. Ciò può avvenire ripetutamente fino a che la variabile x non sia definitivamente eliminata dalla “derivata”. (in realtà la costante può essere ancora derivata ottenendo 0 e la derivazione può avvenire infinite volte ottenendo successivamente sempre la derivata nulla).

I simboli $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, ecc. indicano perciò solo l'ordine genealogico delle derivate in riferimento alla funzione originaria di x posta per prima. **Essi diventano misteriosi soltanto quando li si tratta come punto di partenza del movimento piuttosto che come mere espressioni di funzioni di x derivate successivamente.**

Appare senza dubbio sorprendente il fatto che un rapporto di grandezze annullate debba di nuovo passare per gradi potenziali di annullamento, mentre non c'è nulla di sorprendente nel fatto che, per esempio, $3x^2$ debba percorrere il processo differenziale, così come la sua progenitrice x^3 .

$$4) y = ax^m.$$

Se x diventa x_1 , allora $y_1 = ax_1^m$, e

$$y_1 - y = a(x_1^m - x^m) =$$

$$= a(x_1 - x)(x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + x_1^{m-3}x^2 + \text{ecc fino al termine } x_1^{m-m}x^{m-1}).$$

Quindi

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ ovvero } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a(x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + x_1^{m-3}x^2 + \dots + x_1^{m-m}x^{m-1}).$$

Se ora applichiamo il processo differenziale a questa “derivata provvisoria”, in modo che diventi $x_1 = x$ ossia $x_1 - x = 0$, allora

x_1^{m-1} si trasforma in x^{m-1} ;

$x_1^{m-2}x$ in $x^{m-2}x = x^{m-2+1} = x^{m-1}$;

$x_1^{m-3}x^2$ in $x^{m-3}x^2 = x^{m-3+2} = x^{m-1}$,

ed infine $x_1^{m-m}x^{m-1}$ in $x^{m-m}x^{m-1} = x^{0+m-1} = x^{m-1}$.

Otteniamo così m volte la funzione x^{m-1} , e la derivata è perciò $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$.

Tutte le operazioni del calcolo differenziale potrebbero essere trattate in questa maniera, che però sarebbe una dannata inutile prolissità . Tuttavia qui segue ancora un esempio; in quelli fatti fin ora la differenza $x_1 - x$ esisteva solo una volta nella funzione x , e perciò scompariva a secondo membro per la formazione

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ ovvero } \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Questo non è il caso di ciò che segue:

$$5) y = a^x;$$

se x diviene x_1 , allora

$$y_1 = a^{x_1}.$$

$$\text{Perciò } y_1 - y = a^{x_1} - a^x = a^x(a^{x_1-x} - 1).$$

Ma

$$a^{x_1-x} = \{1 + (a - 1)\}^{x_1-x}$$

e

$$\{1 + (a - 1)\}^{x_1-x} = 1 + (x_1 - x)(a - 1) + \frac{(x_1 - x)(x_1 - x - 1)}{1 \cdot 2}(a - 1)^2 + ecc.$$

Perciò

$$y_1 - y = a^x(a^{x_1-x} - 1) = a^x \left\{ (x_1 - x)(a - 1) + \frac{(x_1 - x)(x_1 - x - 1)}{1 \cdot 2}(a - 1)^2 + ecc. \right\}$$

Di conseguenza

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ ovvero } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \left\{ (a - 1) + \frac{(x_1 - x - 1)}{1 \cdot 2}(a - 1)^2 + ecc. \right\}.$$

Se ora $x_1 = x$, quindi $x_1 - x = 0$, allora otteniamo per la derivata:

$$a^x \left\{ (a - 1) - \frac{1}{2}(a - 1)^2 + \frac{1}{3}(a - 1)^3 - ecc. \right\}.$$

Quindi:

$$\frac{dy}{dx} = a^x \left\{ (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - ecc. \right\}$$

Se chiamiamo A la somma delle costanti tra parentesi, allora

$$\frac{dy}{dx} = Aa^x;$$

questo A è però uguale al logaritmo della base a , dunque:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{da^x}{dx} \log a \cdot a^x;$$

e

$$da^x = \log a \cdot a^x dx.$$

$$6) y = \sqrt{a^2 + x^2};$$

$$y_1 = \sqrt{a^2 + x_1^2},$$

$$y_1 - y = \sqrt{a^2 + x_1^2} - \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Ora, dividendo primo e secondo membro per $x_1 - x$ si ottiene:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \left(\text{ovvero } \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \frac{\sqrt{a^2 + x_1^2} - \sqrt{a^2 + x^2}}{x_1 - x}$$

Per eliminare la radice dal numeratore si moltiplicano numeratore e denominatore per $\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}$, e si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{a^2 + x_1^2 - (a^2 + x^2)}{(x_1 - x)(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2})} = \\ &= \frac{x_1^2 - x^2}{(x_1 - x)(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2})} = \frac{(x_1 - x)(x_1 + x)}{(x_1 - x)(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2})}\end{aligned}$$

Dunque:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_1 + x}{\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}}$$

Se ora $x_1 = x$, ovvero $x_1 - x = 0$, allora

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Quindi

$$dy = d\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}."$$

Con questi esempi Marx conclude il suo lavoro *Sul concetto di funzione derivata*. Lui stesso afferma che fare altri esempi sarebbe ripetitivo, in ogni caso con questi sei ha mostrato ben quattro casi differenti:

- 1) negli esempi 1 e 2 la x si presenta alla prima potenza. In questo caso derivata provvisoria e derivata definitiva coincidono, si ha infatti:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

In questo modo attraverso il processo differenziale che $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ percorre, non viene trovato in effetti nessun nuovo valore limite; ciò è infatti possibile solo quando la

derivata provvisoria include la variabile x , fintanto che $\frac{dy}{dx}$ resta simbolo di un processo reale.

- 2) Negli esempi 3 e 4, il fattore $x_1 - x$ è contenuto solo una volta nell'equazione alle differenze finite, perciò attraverso la divisione di entrambi i membri per $x_1 - x$ viene ottenuto

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oppure } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

che esclude la presenza della differenza $x_1 - x$; lo stesso fattore viene dunque eliminato dalla funzione di x .

- 3) Nell'esempio n°5 il fattore $x_1 - x$ resta nella funzione di x dopo che si perviene al rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

- 4) Nell'ultimo esempio il fattore $x_1 - x$ è presente nel rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ma non può essere semplificato direttamente: si è dovuto infatti operare con una razionalizzazione del denominatore per estrarlo e semplificarlo.

4. SUL DIFFERENZIALE [pag.57]

Mentre nel primo saggio Marx ha illustrato il metodo per il calcolo della derivata mediante uno sviluppo algebrico, che ha dato rigore e giustificazione al calcolo, in questa seconda parte e negli abbozzi successivi viene affrontato il calcolo differenziale in generale, che si basa sulla derivazione.

Quello che Marx mostrerà in questo capitolo è principalmente l'analisi di una funzione espressa dal prodotto di due variabili che dipendono da x .

In questo caso mostrerà che il calcolo del differenziale di tale funzione deve discendere dalla funzione derivata e da qui la necessità di trattarla rigorosamente nel capitolo precedente. E' questo che fa la differenza con il metodo di Newton e Leibniz: le quantità dy e dx che compaiono nella differenziazione del XVIII secolo, non vengono giustificate, sono "poste attraverso una definizione metafisica. Prima esistono e poi vengono definite". Ma come è possibile utilizzarle per dare una definizione di differenziale senza averle introdotte e ricavate algebricamente? La risposta a tale domanda è proprio il lavoro di Marx con i Manoscritti, che ha inizio col saggio precedente.

Analizzerò tale capitolo nelle prossime pagine.

" $f(x)$ ovvero $y = uz$ deve essere differenziata; u e z sono entrambe funzioni dipendenti dalla variabile indipendente x ; esse sono variabili indipendenti rispetto alla loro funzione y , che dipende da loro, dunque anche da x .

$$y_1 = u_1 z_1$$

$$y_1 - y = u_1 z_1 - uz = z_1(u_1 - u) + u(z_1 - z),$$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ ovvero } \frac{\Delta y}{\Delta x} = z_1 \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + u \frac{z_1 - z}{x_1 - x} = \frac{z_1 \Delta u}{\Delta x} + \frac{u \Delta z}{\Delta x}.$$

Se ora al secondo membro è $x_1 = x$, e quindi $x_1 - x = 0$, allora $u_1 - u = 0$, $z_1 - z = 0$, e dunque anche il fattore z_1 nell'espressione $z_1 \frac{u_1 - u}{x_1 - x}$ diventa z , infine a primo membro

$y_1 - y = 0$. Quindi:

$$A) \frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}.$$

Tale equazione moltiplicata per il denominatore dx comune a tutti i suoi termini diventa:

$$B) dy \text{ ovvero } d(uz) = zdu + udz."$$

Marx introduce il capitolo partendo dall'analisi di una funzione in due variabili esattamente allo stesso modo (per via algebrica) con cui ha trattato le funzioni di una variabile. In questo caso però, se confrontiamo l'espressione A) con il risultato che si aveva nel caso in cui si calcolava la derivata di una funzione in una variabile, cioè $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, la differenza è che mentre qui il risultato a cui si perveniva era la derivata della funzione, in A) per arrivare alla derivata dobbiamo conoscere le derivate delle singole variabili che costituiscono la funzione rispetto alla variabile indipendente. Inoltre è chiaro che non si può partire dalla B) senza passare per la A) e senza aver chiarito il significato del rapporto $\frac{dy}{dx}$, dal momento che il suo calcolo deve poggiarsi sul calcolo di altre derivate, cioè $\frac{du}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$.

A questo proposito ritroviamo nel Secondo Abbozzo a pag.99 l'osservazione di Marx:

“Questa equazione (in riferimento alla B) dice immediatamente che, se un prodotto di due variabili qualsiasi deve essere differenziato, ciascuno dei due fattori deve essere moltiplicato per il differenziale dell'altro fattore e i due prodotti così ottenuti devono essere sommati. La prima equazione di operazioni (si riferisce alla A), se il prodotto di due qualsiasi variabili deve essere differenziato, diviene superflua come equazione preparatoria, dopo che ha svolto il proprio compito, cioè quello di fornire la formula simbolica generale di operazioni (si riferisce alla B), che porta direttamente alla soluzione.”

Riprendiamo il discorso da pag.58:

“Bisogna dapprima considerare l’equazione A).

In equazioni con una sola variabile dipendente da x il risultato finale era sempre

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

e $f'(x)$, la prima funzione derivata di $f(x)$, era libera da tutte le espressioni simboliche. Proprio in seguito al processo di differenziazione che $f(x)$ doveva subire per trasformarsi in $f'(x)$, si poneva di fronte a quest’ultima, cioè al “reale coefficiente differenziale”, a primo membro, il suo sosia $\frac{0}{0}$ ovvero $\frac{dy}{dx}$ come equivalente simbolico.

D’altra parte, in tal modo $\frac{0}{0}$ ovvero $\frac{dy}{dx}$, trovava in $f'(x)$ il suo reale equivalente.

Nell’equazione A), invece, $f'(x)$, la prima derivata di uz , include essa stessa coefficienti differenziali simbolici, che perciò si trovano in entrambi i membri, mentre in nessuno di essi c’è un valore reale. Siccome però uz è stato trattato secondo lo stesso metodo con cui erano state trattate prima le funzioni di x con una sola variabile indipendente, questo contrasto nel risultato deriva evidentemente dal carattere particolare della stessa funzione di partenza, cioè da uz .

Ma per il momento bisogna ancora vedere se non c’è qualche intralcio nella derivazione dell’equazione A).

A secondo membro $\frac{u_1-u}{x_1-x}$ ovvero $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ e $\frac{z_1-z}{x_1-x}$ ovvero $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ divennero $\frac{0}{0}, \frac{0}{0}$ perché x_1 divenne uguale a x . Invece di $\frac{0}{0}, \frac{0}{0}$, abbiamo però posto senz’altro $\frac{du}{dx}, \frac{dz}{dx}$. Ma era poi questo ammissibile, giacché quegli $\frac{0}{0}$ qui figurano come *moltiplicatori delle variabili* u e z , mentre nei casi con una variabile dipendente l’unico coefficiente differenziale simbolico, che risultava, $\frac{0}{0}$ ovvero $\frac{dy}{dx}$, non aveva alcun moltiplicatore eccetto la costante 1?

Se poniamo l’originaria formazione di $\frac{du}{dx}, \frac{dz}{dx}$ a secondo membro, allora risulta $z \frac{0}{0} + u \frac{0}{0}$.

Moltiplichiamo quindi z e u per il numeratore dello $\frac{0}{0}$ che accompagna ciascuno di essi, e otteniamo quindi $\frac{0}{0} + \frac{0}{0}$; ... quindi in definitiva:

$$\frac{0}{0} = 0 \text{ e non } z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}.$$

Questa procedura è però matematicamente falsa.

Prendiamo per esempio

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = \frac{\Delta u}{\Delta x};$$

in tal caso il numeratore diventa 0 ovvero $u_1 - u = 0$, soltanto perché il denominatore è divenuto uguale a 0.

Ciò che dunque si mette di fronte alle variabili u e z , non è 0, ma $\left(\frac{0}{0}\right)$, il cui numeratore in questa forma rimane inseparabile dal suo denominatore.

Come moltiplicatore $\frac{0}{0}$ potrebbe perciò annullare in tal caso i suoi coefficienti se e nel caso in cui $\frac{0}{0} = 0$.

... Il fatto che u è una funzione di x , e z è un'altra funzione di x è rappresentabile in

$$u = f(x), u_1 - u = f(x_1) - f(x),$$

e

$$z = \varphi(x), z_1 - z = \varphi(x_1) - \varphi(x).$$

Ma l'equazione di partenza non fornisce né per $f(x)$ né per $\varphi(x)$ funzioni originali di x , cioè valori determinati di x .

Di conseguenza u e z figurano soltanto come nomi, come simboli di funzioni dipendenti di x . Perciò sono date soltanto le *forme generali di questo rapporto di dipendenza*:

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}, \quad \frac{z_1 - z}{x_1 - x} = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x)}{x_1 - x},$$

cioè dapprima attraverso un processo di derivazione da uz .

Se ora il processo di derivazione raggiunge il punto in cui è posto $x_1 = x$, e quindi $x_1 - x = 0$, quelle forme generali si trasformano in

$$\frac{du}{dx} = \frac{df(x)}{dx}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx},$$

e i coefficienti differenziali simbolici $\frac{du}{dx}, \frac{dz}{dx}$ appaiono come incorporati nella “derivata”.

In equazioni con una sola variabile dipendente, $\frac{dy}{dx}$ è soltanto l’espressione differenziale simbolica di

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Sebbene però la natura di $\frac{du}{dx}, \frac{dz}{dx}$, cioè di coefficienti differenziali simbolici, in genere, non cambia affatto se essi appaiono *entro la derivata stessa*, quindi anche al secondo membro dell’equazione differenziale, tuttavia con ciò si trasforma il loro ruolo ed il carattere dell’equazione.

Se rappresentiamo la funzione originale di uz in senso generale mediante $f(x)$, la sua prima derivata attraverso $f'(x)$,

$$\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx},$$

risulta

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Otteniamo la stessa forma generica per equazioni con una sola variabile dipendente. In entrambi i casi risultano le forme di partenza di $\frac{dy}{dx}$ dai processi di derivazione, che trasformano $f(x)$ in $f'(x)$. Non appena, perciò, $f(x)$ è diventata $f'(x)$ di fronte a quest’ultima si trova anche $\frac{dy}{dx}$ come la sua *espressione simbolica*, come la sua controfigura ovvero come suo equivalente simbolico.

In entrambi i casi $\frac{dy}{dx}$ ha dunque lo stesso ruolo.

Diverso è il caso di $\frac{du}{dx}, \frac{dz}{dx}$.

Insieme agli altri elementi di $f'(x)$, in cui sono incorporati, essi trovano in $\frac{dy}{dx}$ la loro espressione simbolica, ovvero il loro equivalente simbolico, ma non hanno anch’essi di fronte $f'(x)$, $\varphi'(x)$, di cui sarebbero controfigure simboliche.”

Quello che emerge da questa trattazione è la differenza che c'è tra la derivata $\frac{dy}{dx}$ nel caso di funzione di una variabile o di due variabili dipendenti da x . Il simbolo è lo stesso, ma nel primo caso nasce come conseguenza della derivazione, è un simbolo inventato per indicare un rapporto di incrementi tendenti a zero che esiste attraverso la differenziazione. E' *l'equivalente simbolico* di fronte al *differenziale reale* $f'(x)$ che esiste prima del simbolo. Nel secondo caso, invece, per calcolare la derivata ho bisogno di calcolare prima $\frac{du}{dx}, \frac{dz}{dx}$, ma in questo caso rappresentano già *simboli di operazioni*, per arrivare alla derivata devo conoscere cosa indicano e quali operazioni devo fare. E quindi non possono essere presupposti come avevano fatto Newton e Leibniz. Marx continua affermando:

“... Essi sono venuti al mondo unici, sono figure d'ombra senza corpo, sono coefficienti differenziali simbolici senza coefficiente differenziale reale, cioè senza alcuna “derivata” equivalente corrispondente. Il coefficiente differenziale simbolico diviene così *un punto di partenza a sé stante*, il cui reale equivalente deve essere ancora trovato.

... Con ciò però il calcolo differenziale appare come un tipo di calcolo specifico che già autonomamente opera sul proprio terreno. Infatti i suoi *punti di partenza* $\frac{du}{dx}, \frac{dz}{dx}$ sono grandezze matematiche appartenenti soltanto ad esso. E questo cambiamento di metodo deriva qui come risultato della differenziazione algebrica di uz . Il metodo algebrico si muta dunque nel metodo differenziale ad esso contrapposto.

Quali sono ora le derivate corrispondenti ai coefficienti differenziali simbolici $\frac{du}{dx}, \frac{dz}{dx}$?

L'equazione di partenza $y = uz$ non fornisce dati per la soluzione di questo problema. Però è possibile trovare una risposta ad esso se si pongono per u e z funzioni originali di x a piacere. Facendo questo, si trasformano però subito anche i coefficienti differenziali simbolici $\frac{du}{dx}, \frac{dz}{dx}$ in *simboli di operazioni*.

Per esempio:

$$y = uz; \quad u = x^4; \quad z = x^3 + ax^2;$$

$$du = 4x^3 dx; \quad dz = (3x^2 + 2ax) dx,$$

così come è stato già mostrato per equazioni con una sola variabile dipendente.

Questi valori du , dz portati nell'equazione A) $\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}$, danno:

$$\frac{dy}{dx} = (x^3 + ax^2) \frac{4x^3 dx}{dx} + x^4 \frac{(3x^2 + 2ax) dx}{dx};$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^3 + ax^2) 4x^3 + x^4 (3x^2 + 2ax);$$

$$dy = \{(x^3 + ax^2) 4x^3 + x^4 (3x^2 + 2ax)\} dx.$$

L'espressione in parentesi è la prima derivata di uz ; siccome però $uz = f(x)$, la sua derivata è $f'(x)$. Se ora poniamo quest'ultima al posto della funzione algebrica, otteniamo:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

da cui si ha:

$dy = f'(x) dx$, espressione valida in generale del differenziale y .

... Faccio osservare che dal XVIII secolo fino ad oggi il problema in generale del calcolo differenziale è di solito così formulato: *trovare per il coefficiente differenziale simbolico il suo vero equivalente*".

Quanto detto finora si ritrova anche negli Abbozzi al lavoro di Marx e viene presentato in questo modo:

“ [Primo Abbozzo, pag.79]

Allorché si procede alla differenziazione di $f(u,z) = uz$ dove le variabili u e z sono entrambe funzioni di x , otteniamo espressioni differenziali in entrambi i membri:

$$\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx};$$

quest'ultima espressione non ha neppure la stessa forma che si ha con una variabile dipendente, perché qui $\frac{dy}{dx}$ ci da subito la $f'(x)$ liberata dai simboli differenziali.

Abbiamo visto una volta per sempre come dall'equazione con una variabile dipendente vengano ottenute le funzioni derivate di x attraverso reale differenziazione e il suo successivo annullamento; e come contemporaneamente si generi per la funzione derivata l'equivalente simbolico $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$.

Che si ponga $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$ appare qui non solo **ammissibile** ma anche **necessario**, poiché $\frac{0}{0}$ nella sua forma originaria è uguale ad ogni grandezza (si intende la derivata) ... Esso appare uguale ad un valore speciale del tutto determinato ed è esso stesso il risultato simbolico delle operazioni attraverso cui questo valore è derivato ...

Qui dunque $\frac{dy}{dx}$ risulta nella sua origine **un valore simbolico o espressione differenziale** di $f'(x)$ già derivata e non è, al contrario, $f'(x)$ ottenuta per mezzo del simbolo $\frac{dy}{dx}$.

Ma nello stesso tempo, **appena abbiamo raggiunto questo risultato**, ci muoviamo già sul terreno del calcolo differenziale e se dobbiamo differenziare, per esempio $x^m = f(x) = y$, possiamo, viceversa, sapere fin da principio che $dy = mx^{m-1}dx$ ovvero $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$.

Qui dunque partiamo dal simbolo; esso non figura più come risultato della derivazione della funzione x , bensì già come *espressione simbolica*, che indica quali operazioni dobbiamo eseguire con $f(x)$ per ottenere il **valore reale** di $\frac{dy}{dx}$, cioè $f'(x)$. [... nella misura in cui essi (i simboli) sono originariamente il risultato di tali processi di differenziazione, possono al *contrario* diventare appunto simboli, con le variabili, di processi ancora da effettuarsi, e quindi possono diventare *simboli di operazioni*, che figurano, invece che come risultati, come punti di partenza; e **questo è il loro ruolo essenziale nel calcolo differenziale**.

(pag.91)]

... Se però $dy = df(x)$ è assunto come punto di partenza da cui solo successivamente viene derivato $\frac{dy}{dx}$, allora, affinché questo differenziale di y abbia un qualche senso, i

differenziali dy , dx devono essere *presupposti* come simboli con un senso *determinato*. [Terzo Abbozzo, pag.111]

Nel primo caso $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$ è ottenuto come equivalente simbolico di $f'(x)$, ed è questa la prima cosa necessaria per scoprire l'origine di $\frac{dy}{dx}$; nel secondo caso $f'(x)$ è ottenuta come valore reale del simbolo $\frac{dy}{dx}$.

Inoltre però i simboli $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ecc., là dove sono diventati formule di operazioni del calcolo differenziale, possono apparire, in qualità di tali formule, anche al *secondo membro dell'equazione*. Se tale equazione nella sua forma finale non dà immediatamente, come in questo caso, $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, ecc., ciò è la dimostrazione che essa è un'equazione che esprime solo simbolicamente quali operazioni devono essere eseguite nell'applicazione a *funzioni determinate* (... che si pongono al posto dei loro segni indeterminati)."

Osserviamo che se si considera l'equazione B) $dy = zdu + udz$, si può vedere che in essa si è persa ogni traccia della sua origine dall'equazione A) $\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}$.

Quindi si capisce che se la B) viene fatta derivare dalla A) abbiamo chiare le sue origini e il suo significato, ma se si parte da questa (come veniva fatto nel secolo precedente a Marx) senza considerare prima la A), allora la B) diventa un'oscura espressione matematica nella quale entrano in gioco elementi infinitamente piccoli.

“Il differenziale $dy = f'(x)dx$ ha immediatamente un aspetto più sospetto del coefficiente differenziale

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

da cui è stato fatto derivare.

In

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$$

numeratore e denominatore sono inseparabilmente connessi; in $dy = f'(x)dx$ essi sono evidentemente separati, cosicché si impone la conclusione che questa sia soltanto una espressione mascherata per $0 = f'(x) \cdot 0$ ovvero $0 = 0$, con cui “non c’è niente da fare”.

In $\frac{0}{0}$ il numeratore è inseparabile dal denominatore; ma perché? Perché entrambi esprimono un rapporto solo se non separati, cioè il rapporto ridotto ad un minimo assoluto:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x},$$

dove il numeratore è diventato 0, poiché lo è diventato il denominatore; entrambi gli 0 se vengono separati, perdono il loro senso simbolico, la loro ragione.

Quando però $x_1 - x = 0$ ottiene in dx una forma che lo presenta come differenza annullata della variabile indipendente x , e quindi anche dy come differenza annullata della funzione di x ovvero della dipendente y , la separazione del numeratore dal denominatore diventa un’operazione senz’altro ammissibile. Però ovunque si trovi ora dx , tale cambiamento di posizione non tocca il rapporto di dy con esso.”

Quest’ultima considerazione ci mostra che se si trascura la genesi di $dy = f'(x)dx$, cioè che essa deriva da

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

la separazione di dy da dx può far pensare che $dy = f'(x)dx$ sia “l’espressione mascherata” di $0 = f'(x) \cdot 0$ ovvero $0 = 0$, con cui non c’è niente da fare.

E’ il modo con cui Marx passa da una matematica metafisica ad una matematica rigorosa che mette in risalto il carattere dialettico del calcolo differenziale: emerge la critica della matematica passata ed il suo nuovo sviluppo in senso scientifico.

Ritroviamo tale discorso anche nel *Terzo Abbozzo* al lavoro *Sul differenziale* [pag. 109]:

“... Analitici più sottili appartenenti al nostro secolo, come per esempio il francese Boucharlat, avevano già avuto il sentore della difficoltà. Egli dice:
 << In $\frac{dy}{dx} = 3x^2$, per esempio, $3x^2$ è il coefficiente differenziale della funzione y . Poiché quindi $\frac{dy}{dx}$ è il simbolo che rappresenta il valore del limite $3x^2$, dx dovrebbe sempre stare a denominatore di dy , però *per facilitare le operazioni algebriche* noi trattiamo $\frac{dy}{dx}$ come una frazione ordinaria e $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ come un’equazione ordinaria e così, liberando l’equazione dal suo denominatore dx , otteniamo il risultato $dy = 3x^2 dx$, la quale espressione si chiama il *differenziale* di y .>>

Dunque per “facilitare le operazioni algebriche” introduciamo una falsa formula.

In verità la faccenda non è così.

In $\frac{0}{0}$ si mantiene il rapporto di differenze scomparse. Appena però $x_1 - x = 0$ ottiene in dx una forma che lo presenta come differenza annullata della variabile indipendente x , e quindi anche dy come differenza annullata della funzione di x ovvero della dipendente y , la separazione del numeratore dal denominatore diventa un’operazione senz’altro ammissibile.

$dy = f'(x)dx$ è solo un’altra espressione per $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.”

Riprendendo il discorso da pag.68 (*Sul differenziale*) Marx ancora sostiene:

“ Siamo dunque doppiamente autorizzati a trattare il differenziale $dy = f'(x)dx$ come equazione simbolica di operazioni.

... Riprendo il metodo algebrico applicato da me in generale ponendo, invece di espressioni determinate algebriche in x , soltanto $f(x)$, e avendo indicato la “derivata provvisoria” come $f^1(x)$ per distinguerla dalla “derivata” definitiva $f'(x)$. Quindi se

$$f(x) = y, \quad f(x_1) = y_1,$$

allora

$$f(x_1) - f(x) = y_1 - y \text{ ovvero } \Delta y,$$

$$f^1(x)(x_1 - x) = y_1 - y \text{ ovvero } \Delta y.$$

La derivata provvisoria $f^1(x)$ deve contenere espressioni in x_1 e x esattamente come il fattore $x_1 - x$, con l'unica eccezione del caso in cui $f(x)$ sia una funzione originale di primo grado

$$f^1(x) = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Se ora viene posto in $f^1(x)$

$$x_1 = x \text{ ovvero } x_1 - x = 0,$$

allora, si ottengono

$$f^1(x) = \frac{0}{0} \text{ ovvero } \frac{dy}{dx}$$

e infine

$$f^1(x)dx = dy \text{ ovvero } dy = f^1(x)dx.$$

Il differenziale dy è dunque il punto finale dello sviluppo algebrico. Esso diventa il punto di partenza del calcolo differenziale che si effettua sul proprio terreno.

... Invece partendo dal calcolo differenziale come un metodo di calcolo determinato e particolare cominciamo subito con l'espressione differenziale, cioè $dy = f^1(x)dx$.

Poiché l'equazione simbolica del differenziale si verifica immediatamente quando si trovano algebricamente le funzioni elementari con una sola variabile dipendente, sembra che anche il cambiamento di metodo si sarebbe potuto sviluppare molto più semplicemente di quanto non fosse con l'esempio $y = uz$.

Le funzioni più elementari sono quelle di un solo grado; esse sono:

- a) $y = x$, la quale dà il coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx} = 1$, quindi il differenziale $dy = dx$.

b) $y = \pm ab$; dà il coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx} = 1$ e quindi di nuovo il differenziale $dy = dx$.

c) $y = ax$; dà il coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx} = a$, quindi il differenziale $dy = adx$.

Prendiamo ora il caso più semplice a).

... [si applica il metodo algebrico illustrato da Marx]...

Il risultato vero e proprio era:

$$\text{I)} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

$$\text{II)} \quad \frac{0}{0} \text{ oppure } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

Poiché I e II portano entrambi allo stesso risultato, possiamo scegliere l'uno o l'altro indifferentemente. In ogni caso porre $x_1 - x = 0$ [dalla I per arrivare alla II] sembra un'operazione non richiesta e perciò arbitraria.

... Noi sappiamo dall'algebra che se i secondi membri di due equazioni sono identici, lo devono essere anche i primi. Da ciò consegue che

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Siccome però x e la sua dipendente y sono entrambe grandezze variabili, Δx , sebbene sia una differenza finita, può diminuire infinitamente, in altre parole può *avvicinarsi* a 0 per quanto si vuole e dunque può diventare *infinitamente piccola*; quindi può diventare tale anche Δy dipendente da essa. Poiché inoltre $\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, ne consegue che $\frac{dy}{dx}$ non significa realmente quello strano $\frac{0}{0}$, bensì l' "uniforme della domenica" di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ non appena questo

funge da rapporto di differenze infinitamente piccole, quindi in maniera diversa da quanto accade nel comune calcolo delle differenze.”

Finora Marx, nei due saggi, ha illustrato il metodo algebrico per determinare la derivata di una funzione in maniera rigorosa e da questa arrivare a definire il differenziale come punto ultimo di tutta la trattazione, che così non viene più visto come un simbolo mistico privo di giustificazione matematica.

Marx afferma ciò anche nelle prime pagine del Primo Abbozzo al lavoro “Sul differenziale” nelle quali ribadisce il fatto che nelle funzioni di una sola variabile dipendente, la derivata venga calcolata attraverso una “reale differenziazione ed il suo successivo annullamento” ed è da questo processo che nasce l'equivalente simbolico $\frac{dy}{dx}$.

Questo viene dimostrato nella sua origine e *“non si trova affatto $f'(x)$ per mezzo del simbolo $\frac{dy}{dx}$, bensì al contrario l'espressione differenziale $\frac{dy}{dx}$ quale equivalente simbolico della funzione di x già derivata” [pag. 83]*

Una volta fatto ciò, allora il simbolo può essere considerato come punto di partenza: ora presenta un'origine e di conseguenza ha assunto un senso che con Leibniz e Newton non era stato specificato.

“Il metodo algebrico si muta dunque nel metodo differenziale ad esso contrapposto”. Si ha così quello che Marx definisce *cambiamento di metodo*, che “sposta l'iniziativa dal secondo membro (quello algebrico) al primo membro (quello simbolico)” e in tal modo il calcolo differenziale appare come un tipo di calcolo che opera autonomamente sul proprio terreno.

“Ma è certo che questo mutamento, questo rovesciamento dei ruoli non è stato preso in considerazione da nessun matematico, e tanto meno è stato dimostrato come necessario con una equazione differenziale del tutto elementare.” [pag.93]

Marx continua affermando che *“coloro che scoprirono il calcolo differenziale e la maggior parte dei loro successori fanno dei simboli differenziali il punto di partenza del calcolo”*.

Una volta che l'espressione $dy = f'(x)dx$ è giustificata, possiamo partire da questa. Nel Secondo Abbozzo a pag.100 Marx illustra in generale il calcolo del differenziale di $f(x) = uz$ assumendo i differenziali dy , dz , du come punti di partenza:

“... Così saranno poste infatti per u e z funzioni qualsiasi determinate di x , a cui accenniamo soltanto in

$$u = f(x) \text{ e } z = \varphi(x)$$

e così risulta

$$dy = \varphi(x)df(x) + f(x)d\varphi(x),$$

e questi segni d indicano soltanto una differenziazione da eseguirsi.

Il risultato di questa differenziazione ha la forma generale

$$df(x) = f'(x)dx$$

e

$$d\varphi(x) = \varphi'(x)dx.$$

Quindi

$$dy = \varphi(x)f'(x)dx + f(x)\varphi'(x)dx.$$

Infine

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)f'(x) + f(x)\varphi'(x).$$

Qui, dove il differenziale ha il ruolo di un simbolo già dato di operazioni, facciamo quindi derivare da esso i coefficienti differenziali, mentre nell’originario sviluppo algebrico al contrario il differenziale era stato fatto derivare dall’equazione dei coefficienti differenziali.”

Per concludere il saggio *Sul differenziale* Marx illustra un esempio:

“Prima di passare alla parte che delinea su scala molto ridotta il processo storico di sviluppo del calcolo differenziale, voglio dare ancora un esempio del metodo algebrico finora applicato. Per caratterizzarlo in maniera definitiva pongo la funzione determinata al lato sinistro [cioè al primo membro] che è sempre il lato dell’iniziativa, perché scriviamo

da sinistra a destra ... se la funzione y e la variabile dipendente x sono assegnate a due equazioni di cui la prima rappresenta y come funzione della variabile u , e la seconda rappresenta u come funzione della variabile x , si può trovare il coefficiente differenziale simbolico comune ad entrambe.

Se si prende:

$$1) \quad 3u^2 = y;$$

$$2) \quad x^3 + ax^2 = u;$$

allora:

$$3u_1^2 = y_1,$$

$$x_1^3 + ax_1^2 = u_1.$$

Consideriamo dapprima l'equazione 1):

$$3u_1^2 - 3u^2 = y_1 - y,$$

$$3(u_1^2 - u^2) = y_1 - y,$$

$$3(u_1 - u)(u_1 + u) = y_1 - y,$$

$$3(u_1 + u) = \frac{y_1 - y}{u_1 - u} \text{ ovvero } \frac{\Delta y}{\Delta u}.$$

Se poniamo ora a primo membro $u_1 = u$, quindi $u_1 - u = 0$, otteniamo:

$$3(u + u) = \frac{dy}{du},$$

$$3(2u) = \frac{dy}{du},$$

$$6u = \frac{dy}{du}.$$

Poniamo ora per u il suo valore $x^3 + ax^2$, allora:

$$3) \quad 6(x^3 + ax^2) = \frac{dy}{du}$$

Rivolgiamoci ora all'equazione 2) :

$$x_1^3 + ax_1^2 - x^3 - ax^2 = u_1 - u,$$

$$(x_1^3 - x^3) + a(x_1^2 - x^2) = u_1 - u,$$

$$(x_1 - x)(x_1^2 + x_1x + x^2) + a(x_1 - x)(x_1 + x) = u_1 - u,$$

$$(x_1^2 + x_1x + x^2) + a(x_1 + x) = \frac{u_1 - u}{x_1 - x} \text{ ovvero } \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Poniamo $x_1 = x$, al primo membro; abbiamo allora

$$(x^2 + xx + x^2) + a(x + x) = \frac{du}{dx}.$$

$$4) \quad 3x^2 + 2ax = \frac{du}{dx}.$$

Moltiplichiamo le equazioni 3) e 4) l'una per l'altra; abbiamo:

$$5) \quad 6(x^3 + ax^2)(3x^2 + 2ax) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

Così è trovata algebricamente la formula di operazioni

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

che talvolta è anche applicabile a equazioni con due variabili indipendenti.

Che non vi sia nessuna magia nella trasformazione di un processo dato con funzioni determinate in una forma del tutto generale, lo dimostra l'esempio sopra esposto.

Supponiamo:

- 1) $y = f(u)$, $y_1 = f(u_1)$, per cui $y_1 - y = f(u_1) - f(u)$,
- 2) $u = \varphi(x)$, $u_1 = \varphi(x_1)$, per cui $u_1 - u = \varphi(x_1) - \varphi(x)$.

Dalla differenza in 1) risulta:

$$\frac{y_1 - y}{u_1 - u} = \frac{f(u_1) - f(u)}{u_1 - u}; \quad \frac{dy}{du} = \frac{df(u)}{du},$$

siccome però $df(u) = f'(u)du$, allora

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(u)du}{du}$$

di conseguenza:

$$3) \quad \frac{dy}{du} = f'(u).$$

Dalla differenza in 2) consegue

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x)}{x_1 - x}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx}$$

e siccome $d\varphi(x) = \varphi'(x)dx$, quindi

$$\frac{du}{dx} = \frac{\varphi'(x)dx}{dx},$$

dunque

$$4) \quad \frac{du}{dx} = \varphi'(x).$$

Se moltiplichiamo l'equazione 3) con la 4), otteniamo

$$5) \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ ovvero } \frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x), \text{ c. v. d. "}$$

Questo esempio è stato mostrato anche a pag.102 nel Secondo Abbozzo, ma qui Marx fa vedere come lo stesso differenziale può essere calcolato anche attraverso il metodo tradizionale, per il quale *“le espressioni simboliche fungono come formule già date di operazioni del calcolo”*.

Il problema viene così posto: *trovare il valore reale del coefficiente differenziale simbolico* $\frac{dy}{dx}$.

Dal momento che il metodo algebrico è già stato illustrato in precedenza, vediamo come Marx mostra il metodo tradizionale:

“Sia

$$a) y = f(u) \text{ e } b) u = \varphi(x).$$

Dapprima

$$1) y = f(u) \text{ dà:}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{df(u)}{du} = \frac{f'(u)du}{du} = f'(u).$$

$$2) \frac{du}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{\varphi'(x)dx}{dx} = \varphi'(x).$$

Quindi

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

Ma

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

Quindi

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

... (applicando il procedimento all'esempio precedente)

Se $y = 3u^2$, $u = x^3 + ax^2$, allora secondo la formula

$$\frac{dy}{du} = \frac{d(3u^2)}{du} = 6u (= f'(u));$$

ma l'equazione b) dà $u = x^3 + ax^2$. Se poniamo questo valore di u in $6u$, allora

$$\frac{dy}{du} = 6(x^3 + ax^2) (= f'(u)).$$

Inoltre

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 2ax (= \varphi'(x)).$$

Quindi

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ ovvero } \frac{dy}{dx} = 6(x^3 + ax^2)(3x^2 + 2ax) (= f'(u) \cdot \varphi'(x))."$$

Marx conclude osservando che i due metodi di calcolo non sono paragonabili: il metodo algebrico risulta infatti più lungo di quest'ultimo e spesso la scomposizione del termine $y_1 - y$ per estrarre il fattore $x_1 - x$ è complicata.

La differenza però sta nel fatto che, mentre nel primo metodo i simboli nascono in modo algebrico, nel metodo tradizionale si parte da simboli che invece sono dati “*attraverso presupposti metafisici celati o palesi che a loro volta portano a conseguenze di ordine metafisico e non matematico*”.

Ci sono ancora poche pagine che Marx ha scritto indicandole come “Alcune aggiunte” che vale la pena di citare. Rappresentano infatti una conclusione al lavoro “Sul differenziale”.

[pag.113]

“Nello sviluppo di $d(uz)$ nell’ultimo manoscritto era per me essenziale, in riferimento all’equazione

$$\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx},$$

la dimostrazione che il metodo algebrico qui applicato si trasforma nel metodo differenziale, sviluppando nella derivata, quindi al secondo membro, *coefficienti differenziali simbolici* senza rispettivi equivalenti di coefficienti reali, per cui questi simboli come tali diventano punti di partenza *autonomi* e *formule di operazioni* già date.

La forma dell’equazione scritta sopra si presenta a questo scopo tanto più adatta in quanto permette una comparazione tra $\frac{du}{dx}, \frac{dz}{dx}$, prodotti entro la derivata $f'(x)$, con $\frac{dy}{dx}$ che si trova, di fronte, a primo membro, e che è il coefficiente differenziale simbolico di $f'(x)$, per cui costituisce il suo equivalente simbolico.

Riguardo al carattere di $\frac{du}{dx}, \frac{dz}{dx}$, quali formule di operazioni, mi sono limitato ad accennare che per quei coefficienti differenziali simbolici si possono trovare “derivate” qualsiasi come loro valori reali, se si pone per u una qualsiasi $f(x)$ e per z una qualsiasi $\varphi(x)$.”

Negli abbozzi e in quest’ultima aggiunta, Marx riprende più volte il concetto di

sottotangente ad una curva e ne fa l’analogia con il differenziale della forma $z \frac{du}{dx}$.

Ricordiamo che la sottotangente ad una curva, dato un sistema di riferimento cartesiano, è il segmento sull’asse delle ascisse che ha per estremi l’intersezione tra la retta verticale mandata da un punto P sulla curva sull’asse delle ascisse e l’intersezione della tangente passante per quel punto con l’asse delle ascisse.

Leibniz aveva determinato la tangente ad una curva, che era uno dei problemi di cui si cercava una soluzione in quel periodo, proprio ricorrendo alla sottotangente.

Con lo sviluppo della geometria analitica ad opera di Cartesio nei primi anni del 1600, una curva veniva descritta algebricamente attraverso un’equazione della forma $F(x, y) = 0$.

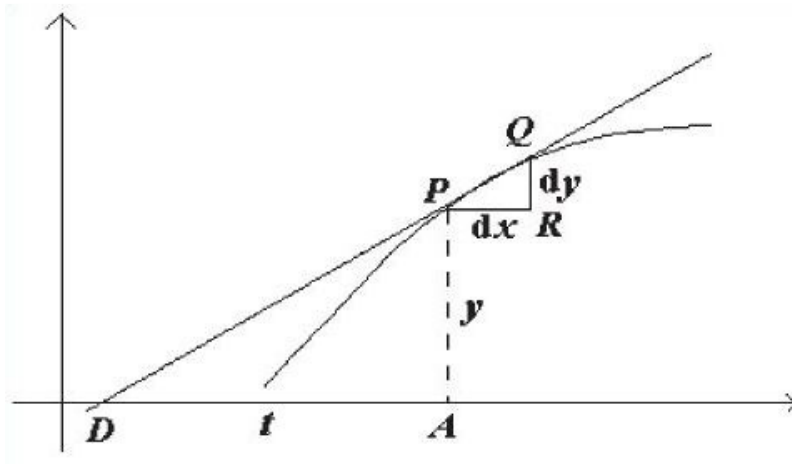
Il problema della derivazione nel 1700 era formulato in questo modo: data una relazione $F(x, y) = 0$ tra le variabili x e y trovare una relazione tra i loro differenziali.

Leibniz definisce quest’ultimi mediante la tangente. Pur non parlando esplicitamente di quantità infinitesime, si riferisce a “quantità prese ad arbitrio” che possono essere

infinitamente piccole ed è proprio questa loro proprietà che consente da una parte di dare le regole di differenziazione e dall'altra di legare i differenziali alla tangente.

Ecco lo schema seguito da Leibniz per trovare la tangente.

Essa può essere pensata come la retta che unisce due punti sulla curva $P = (x, y)$ e $Q = (x + dx, y + dy)$ infinitamente vicini, cioè per tratti infinitamente piccoli la curva coincide con la tangente. La retta passante per P e Q è proprio la tangente cercata.



La similitudine dei triangoli DPA e PQR ci dà la relazione $DA:PA = PR:QR$ e quindi

$$t = y \frac{dx}{dy}.$$

Una volta conosciuto il rapporto tra gli incrementi dx e dy si troverà subito la sottotangente t e quindi la tangente cercata.

Marx osserva nel suo lavoro:

“... la formula generale della sottotangente della curva $y \frac{dx}{dy}$ è una forma del tutto identica a $z \frac{du}{dx}$, $u \frac{dz}{dx}$, in quanto esse sono tutti prodotti di una variabile per il coefficiente differenziale simbolico.

... Finché lasciamo l'espressione com'è (riferendosi a $y \frac{dx}{dy}$), essa ci conduce ancora al nulla, sebbene per dx abbiamo la rappresentazione sensibile che si tratti del differenziale dell'ascissa, e per dy , che si tratti del differenziale dell'ordinata.

Per ottenere un qualsiasi risultato positivo, dobbiamo considerare dapprima l'equazione di una determinata curva che ci dà un determinato valore di y in x e perciò anche per dx , come, per esempio, l'equazione della normale parabola, cioè $y^2 = ax$; e poi attraverso differenziazione otteniamo $2ydy = adx$; di conseguenza $dx = \frac{2ydy}{a}$.

Se poniamo questo valore determinato per dx nella formula generale della sottotangente $y \frac{dx}{dy}$, otteniamo

$$\frac{y \frac{2ydy}{a}}{dy} = \frac{y \cdot 2ydy}{ady} = \frac{2y^2}{a},$$

e poiché $y^2 = ax$, si ha

$$\frac{2y^2}{a} = \frac{2ax}{a} = 2x,$$

il doppio della ascissa come valore della sottotangente della parabola data.”

Anche questo esempio geometrico mostra come Marx in generale tende ad arrivare ad un risultato effettivo. Nella derivazione della funzione $y = uz$ ribadisce più volte il fatto che se alla u e alla z si sostituiscono funzioni determinate si arriva al calcolo della derivata che altrimenti resterebbe una formula generale. In questo caso è lo stesso: la sottotangente espressa da un'equazione differenziale assume un valore particolare ed effettivo nel momento in cui si considera una curva particolare.

5. SULLA STORIA DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

[pag.117]

Il lavoro di Marx continua con una sintesi sulla storia del calcolo differenziale che può essere suddivisa in tre periodi: l'analisi secondo Newton e Leibniz che si erano basati su un metodo mistico che non giustificava i differenziali, il metodo razionalistico di D'Alembert ed infine il metodo puramente algebrico di Lagrange.

Nonostante i matematici si siano scontrati con l'infinito in epoche remote (molte testimonianze risalgono già al periodo greco intorno al 500 a.C.), gli studi più significativi risalgono alla seconda metà del diciassettesimo secolo. E' però nell' epoca capitalistica che si afferma la nozione di grandezza variabile nel campo matematico: lo studio delle leggi della fisica e della meccanica si basavano sulla ricerca delle velocità dei corpi e delle loro traiettorie, quindi nel caso in cui il movimento di un corpo non fosse più uniforme ma a velocità variabile la matematica elementare non era più in grado di descrivere i rapporti tra tempo, posizione e velocità.

Questo portò ad una trattazione più rigorosa delle quantità variabili e ad una formulazione del calcolo differenziale e integrale.

E' in questo periodo, infatti, che si cerca la soluzione ad un antico problema: la determinazione della retta tangente al grafico di una data funzione reale in ogni suo punto. Tale problema ha infatti riscontri in discipline come l'ottica e la meccanica (che si stavano sviluppando in quel periodo) oltre ad essere un problema di geometria pura.

Newton e Leibniz svilupparono il calcolo differenziale indipendentemente: da un lato Newton elaborò una teoria legata più alla meccanica e agli aspetti pratici; dall'altro lato Leibniz affrontò il calcolo cercando un formalismo efficiente e introducendo un simbolismo originale.

Nonostante questo, il calcolo presentava grossi difetti e i suoi fondamenti teorici non erano stati del tutto chiariti.

L'analisi di Newton era basata sulle grandezze che variano in funzione del tempo che venivano chiamate *fluenti* e indicate con x , y , ecc. e le loro velocità chiamate *flussioni* e che venivano rappresentate con $\dot{x}$, $\dot{y}$.

Marx fa notare a riguardo:

“... per esempio, $y = uz$; $\dot{y}, \dot{z}$ e $\dot{u}$ denotano le velocità con cui y, u, z rispettivamente crescono; in tal caso i momenti (che sono dati dal prodotto delle velocità e della parte di tempo infinitamente piccola in cui fluiscono queste quantità) di y, u, z sono $\tau\dot{y}, \tau\dot{z}$ e $\tau\dot{u}$, e otteniamo:

$$y = uz, y + \tau\dot{y} = (u + \tau\dot{u})(z + \tau\dot{z}) = uz + u\tau\dot{z} + z\tau\dot{u} + \tau^2\dot{u}\dot{z};$$

perciò

$$\tau\dot{y} = u\tau\dot{z} + z\tau\dot{u} + \tau^2\dot{u}\dot{z}.$$

Poiché τ è infinitamente piccolo, scompare da sé, e altrettanto $\tau^2\dot{u}\dot{z}$ come suo prodotto.

Quindi otteniamo

$$\dot{y} = u\dot{z} + z\dot{u};$$

ovvero la flussione di $y = uz$ è $\dot{y} = u\dot{z} + z\dot{u}$.

... Ora da dove deriva il termine $\dot{u}\dot{z}$ che deve essere forzatamente eliminato?

Semplicemente dal fatto che i differenziali sono posti fin da principio come esistenze autonome, separate dalle grandezze variabili, da cui nascono, senza che siano fatti derivare attraverso un qualsiasi procedimento matematico.

... $\dot{u}\dot{z}$ è eliminato per la sua infinita piccolezza in paragone con $u\dot{z}$ e $z\dot{u}$, in tal caso ci si potrebbe appellare matematicamente solo al fatto che $u\dot{z} + z\dot{u}$ è soltanto un valore approssimato, considerato approssimato come si vuole. In questo caso si verifica un miracolo ancora più grande, cioè che non si ottengono affatto attraverso questo metodo valori approssimativi, bensì valori esattamente determinati.

Ma il “miracolo” non è un miracolo. Sarebbe un miracolo se non si ottenesse *alcun risultato esatto* attraverso l’eliminazione violenta di $\dot{u}\dot{z}$. *Si elimina cioè soltanto un errore di calcolo*, che però è la conseguenza inevitabile di un metodo che introduce l’incremento indeterminato della variabile (un differenziale) come simbolo già dato di operazioni, e che comporta fin da principio nel calcolo differenziale un tipo di calcolo strano, diverso dall’algebra ordinaria.”

Lo stesso tipo di calcolo compare in Leibniz, che però fece una trattazione più generale, senza riferirsi a grandezze variabili in funzione del tempo, ma parlando di variabili dipendenti e indipendenti. Il simbolismo che utilizzò è quello ancora tutt’oggi utilizzato: egli indicò il differenziale di una variabile y con dy .

Anche in questo caso grandezze infinitamente piccole di *secondo ordine* scompaiono di fronte a grandezze infinitamente piccole di *primo ordine*.

Scrisse Marx a riguardo:

“Non resta dunque altro che immaginarsi gli incrementi della variabile come incrementi infinitamente piccoli e attribuire loro, in quanto tali, *esistenza autonoma*, per esempio nei simboli $\dot{x}, \dot{y}$ ovvero dx, dy ecc. Ma grandezze infinitamente piccole sono come grandezze infinitamente grandi, e nell’equazione

$$k = 2x dx + dx dx$$

il $dx dx$ ha lo stesso diritto di esistenza di $2x dx$: ma la cosa più strana è il ragionamento attraverso cui esso viene brutalmente eliminato cioè appunto in base al fatto che viene utilizzata la relatività del concetto di infinitamente piccolo.”

Quindi, le eliminazioni forzate di termini nello sviluppo dell’ equazione differenziale sono dovute semplicemente al fatto che i differenziali “sono posti fin da principio per definizione come esistenze autonome infinitamente piccole” e se in seguito a questi “giochi di prestigio” con cui si fanno scomparire alcuni termini delle equazioni, si ottengono risultati esatti, è perché in effetti si sta eliminando solo un “errore di calcolo” .

Nel processo di differenziazione, la variabile x che cresce fino a x_1 viene fin da subito indicata con $x + dx$, dove i dx sono incrementi infinitesimi che esistono autonomamente. Quindi la derivata viene calcolata correttamente senza darne una giustificazione algebrica. Marx dichiarò infatti:

“Che questo risultato matematicamente vero si basasse sul presupposto altrettanto matematicamente del tutto errato che $x_1 - x = \Delta x$, è fin da principio $x_1 - x = dx$ ovvero $\dot{x}$, non si sapeva. Altrimenti si sarebbe ottenuto lo stesso risultato non mediante un gioco di prestigio ma attraverso una operazione algebrica di tipo assai semplice e restando in campo matematico” [pag.137]

Diverso è invece il metodo di D’Alembert che presentò il *calcolo differenziale razionale*.

Parte, come Newton e Leibniz, dall' incremento della variabile indipendente ma con una correzione fondamentale: $x_1 = x + \Delta x$ dove Δx , pur essendo una quantità indeterminata, costituisce comunque un incremento finito. Inoltre, il differenziale non è il punto di partenza del calcolo, bensì quello d'arrivo e D'Alembert non è così costretto a sopprimere i termini delle equazioni, se non attraverso corrette operazioni matematiche.

Marx presentò così il metodo:

“... La trasformazione di questo h o Δx in dx si trova solo come ultimo risultato dello sviluppo o almeno poco prima della fine, mentre presso i mistici che hanno dato inizio al calcolo appare come punto di partenza.

Egli imposta in generale il problema così:

se $y = f(x)$, $y_1 = f(x + h)$, bisogna determinare che cosa diventa il valore di $\frac{y_1 - y}{h}$, se la grandezza h scompare, quindi che cosa diventa il valore di $\frac{0}{0}$.

La differenza $f(x + h) - f(x)$ ha bisogno dello sviluppo per la trasformazione in rapporto dell'incremento della funzione con l'incremento della variabile indipendente; dunque ha un ruolo reale e non solo nominale come presso i mistici.

In D'Alembert è necessario servirsi di questa differenza, perché i movimenti di sviluppo devono essere eseguiti in base ad essa.

(Ecco un esempio riportato da Marx)

$$f(x) = x^3,$$

$$f(x + h) = (x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3,$$

$$f(x + h) - f(x) = 3x^2h + 3xh^2 + h^3.$$

Dividendo i membri per h , si ottiene

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2.$$

In base a ciò si forma a primo membro

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x_1 - x},$$

che appare così come un *rapporto derivato di differenze finite*.

Ponendo ora $h = 0$, ovvero $x_1 = x$, quindi $x_1 - x = 0$, questa espressione si trasforma in

$\frac{dy}{dx}$, mentre contemporaneamente, ponendo $h = 0$, sono scomparsi i termini $3xh + h^2$,

attraverso una corretta operazione matematica. Essi dunque sono ora tolti di mezzo senza giuochi di prestigio. Si ottiene:

$$\frac{0}{0} \text{ ovvero } \frac{dy}{dx} = 3x^2 = f'(x).$$

... La derivazione è perciò essenzialmente la stessa rispetto a Leibniz e Newton, ma la derivata $3x^2$ qui viene *separata*, con un procedimento strettamente matematico.

D'Alembert aveva tolto la veste mistica al calcolo differenziale, che aveva fatto così un progresso enorme.”

Con Lagrange si tentò la fondazione del calcolo differenziale su basi puramente algebriche. Egli partì dalla derivazione algebrica delle funzioni reali e considerò i simboli differenziali espressioni puramente simboliche delle funzioni derivate.

Lagrange utilizzò il teorema di Taylor per lo sviluppo in serie di una funzione, e senza il ricorso a “infinitesimi” e a “prime e ultime ragioni”.

Dopo aver dimostrato che una qualsiasi funzione è sviluppabile in serie di Taylor nel suo insieme di definizione, Lagrange introduce la “derivata” (il termine qui compare per la prima volta) come coefficiente del termine $x - x_0$ dello sviluppo della funzione f nel punto x_0 . Più precisamente, nello sviluppo $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$ i coefficienti $a_0, a_1, a_2 \dots$ dipenderanno da x_0 , mentre per definizione, si dice derivata della f in x_0 il coefficiente a_1 che si indica con il simbolo $f'(x_0)$.

Vale la pena citare brevemente il punto di vista di Marx a proposito della formula di Taylor e di quella di Mac Laurin. A pag. 143, infatti, Marx afferma :

“ Lagrange assume come suo diretto punto di partenza il teorema di Taylor, che è effettivamente il teorema più generale e come tale più comprensivo, e assume contemporaneamente la formula di operazioni del calcolo differenziale, cioè la serie di sviluppo di $f(x + h)$ espressa in coefficienti differenziali simbolici ... Qui bisogna inserire l'esame dei teoremi di Mac Laurin e di Taylor.”

Nei manoscritti Marx dedica una sezione intitolata “I teoremi di Taylor e Mac Laurin e la teoria della funzione di Lagrange” nella quale viene affermato principalmente quanto segue [da pag.153]:

“La scoperta di Newton del teorema del binomio rivoluzionò l'intera algebra rendendo possibile in primo luogo una teoria generale delle equazioni. Il teorema del binomio è però anche la base principale del calcolo differenziale.

Anche l'ordinamento di un testo didattico è la prova del fatto che come può essere sviluppato il teorema del binomio dai teoremi di Taylor e di Mac Laurin, così è possibile il contrario.

Tuttavia da nessuna parte, neanche in Lagrange, la cui teoria delle funzioni derivate diede una nuova base al calcolo differenziale, è stato messo in chiaro, in tutta la sua naturale semplicità, il nesso fra il teorema del binomio e quei teoremi; ed è importante qui come ovunque, togliere alla scienza il velo del mistero.

Il teorema di Taylor, che storicamente precede quello di Mac Laurin, dà per ogni funzione di x che cresce di un incremento h positivo o negativo, quindi in generale per $f(x \pm h)$, una serie di espressioni simboliche indicanti attraverso quale serie di operazioni differenziali $f(x \pm h)$ è sviluppabile. Si tratta qui dunque di sviluppo di una qualsiasi funzione di x , *allorché essa varia.*

Mac Laurin, invece, dà lo sviluppo generale di *ogni funzione di x*, pure in una serie di espressioni simboliche, che indica come una tale funzione può essere facilmente trovata attraverso il calcolo differenziale. Sviluppo di una funzione qualsiasi di *x* non vuole dire però null'altro che *sviluppo delle funzioni costanti combinate con potenze della variabile indipendente x*.

... E così si ottengono due formule che sono applicabili a tutte le funzioni particolari di *x*, o *x + h*, entro certi limiti.

Formula di Taylor:

$$f(x + h) \text{ ovvero } y_1 = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3y}{dx^3} \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{d^4y}{dx^4} \frac{h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{ecc.}$$

Formula di Mac Laurin:

$$f(x) \text{ ovvero } y = (y) + \left(\frac{dy}{dx}\right) \frac{x}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{ecc.}$$

... Io non prenderò ulteriormente in considerazione il teorema di Mac Laurin come semplice caso particolare del teorema di Taylor . Qui voglio solo aggiungere che esso presenta i cosiddetti “difetti ” come il teorema di Taylor.

... Bisogna soltanto osservare riguardo all'equazione di partenza di Taylor :

$$y_1 \text{ ovvero } f(x + h) = y \text{ ovvero } f(x) + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \text{ecc.}$$

Questa serie non è dimostrata in alcun modo; $f(x + h)$ non è un binomio di grado determinato; $f(x + h)$ è piuttosto l'espressione generale indeterminata di ogni funzione generale indeterminata di ogni funzione della variabile *x* che cresce di un incremento *h* positivo o negativo; $f(x + h)$ include, dunque, funzioni di *x* di ogni grado, esclude però, contemporaneamente, ogni grado determinato della serie di sviluppo. Taylor stesso mette perciò “+ ecc. ” alla fine della serie. Deve perciò ancora essere *dimostrato* che la legge della serie di sviluppo è applicabile senz'altro alla generale indeterminata $f(x)$ e perciò altrettanto alla generale indeterminata $f(x + h)$. ”

Quello che emerge dal commento precedente è la critica di Marx per il fatto che nessuno ha messo in evidenza il nesso tra il teorema del binomio e i teoremi di Taylor e di Mac Laurin. Marx, probabilmente, non ha chiara la loro differenza e quello che lui indica come “difetto del teorema” è dovuto alla forma dell’equazione di Taylor di partenza e alla presenza del termine “+ ecc.”.

Infatti, lui afferma che, essendo $f(x + h)$ una funzione generica, essa potrebbe essere anche una potenza e quindi il suo sviluppo si otterrebbe mediante il binomio di Newton come somma finita di termini di grado determinato.

Di conseguenza, ci sarebbe una contraddizione tra il caso in esame e la formula generale di partenza, perché nel caso di una funzione di grado determinato si avrebbe uno sviluppo di grado indeterminato, vista la presenza di “+ ecc.” nella serie.

Tra le due formule, però, esiste una differenza.

Il binomio di Newton esprime lo sviluppo *esatto* della potenza n-esima di un binomio qualsiasi, cioè si tratta di un’uguaglianza a tutti gli effetti.

La formula di Taylor (e conseguentemente quella di Mac Laurin) nasce dalla ricerca dell’ approssimazione di una funzione qualunque continua e derivabile almeno n volte in una più semplice, in particolare una funzione polinomiale, per esempio

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

I coefficienti si ricavano facilmente richiedendo che le due funzioni siano uguali in un punto x_0 e che abbiano le successive derivate in quel punto uguali, cosicché la tangente sia la stessa (derivata prima uguale), siano entrambe concave o convesse (derivata seconda uguale) e così via. Si scopre che i coefficienti saranno della forma:

$$a_n = \frac{f^n(x_0)}{n!}$$

e più si va avanti nello sviluppo, quindi più è grande il grado n, migliore sarà l’approssimazione.

A differenza del binomio di Newton, in cui lo sviluppo era effettivo, qui non si ha in generale un’uguaglianza, a meno di sommare all’approssimazione l’errore commesso che dipende da n.

L’eccezione è costituita, per esempio, dalle funzioni analitiche, cioè funzioni infinitamente derivabili localmente espresse da una serie di potenze convergente. In questo caso, comunque si prenda un punto del dominio della funzione, esiste un suo intorno in cui la funzione coincide con la sua serie di Taylor.

E' ora chiaro il significato del termine "+ ecc." nell' equazione di partenza di Taylor e si capisce la differenza tra lo sviluppo algebrico del binomio di una potenza e i teoremi di Taylor e Mac Laurin che danno soltanto un' approssimazione.

Il lavoro di Taylor si è mosso fin dall' inizio sul terreno del calcolo differenziale e non aveva nessun punto di partenza algebrico.

A pag.161 continua a manifestare questo suo pensiero:

“Il maggiore difetto del teorema è che $f(x)$ e $f(x + h)$, quali espressioni simboliche soltanto di un binomio di qualsiasi grado, vengono trasformate in espressioni dove $f(x)$ è una funzione che include tutti i gradi e che perciò non ha nessun grado. Questo salto dall' algebra ordinaria nell' algebra delle variabili è presupposto come un fatto compiuto, non è dimostrato ed è in contraddizione con tutte le leggi dell' algebra ordinaria.

... In altre parole: l' equazione di partenza

$$y_1 \text{ ovvero } f(x + h) = y \text{ ovvero } f(x) + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \text{ecc.}$$

non soltanto non è dimostrata ma presuppone coscientemente o incoscientemente una sostituzione di variabili in costanti che contrasta con tutte le leggi dell' algebra. La derivazione di questa equazione dall' algebra sembra perciò basarsi su un inganno.”

Nei Manoscritti Marx ha portato avanti la ricerca sui fondamenti del calcolo differenziale a partire dagli studi di Lagrange, mettendo però in evidenza il fatto che anche in questo caso vi erano dei limiti nel processo di algebrizzazione.

Marx osservò per esempio:

“... Fu dunque compito di Lagrange ricondurre il calcolo differenziale a una base strettamente algebrica.

... Il grande merito di Lagrange è non solo quello di aver trovato i fondamenti del teorema di Taylor e del calcolo differenziale in generale mediante l' analisi puramente algebrica bensì di aver introdotto anche il concetto delle funzioni derivate, concetto che più o meno

tutti i suoi successori usano anche senza menzionarlo. Ma non si è limitato a ciò. Egli fornisce lo sviluppo puramente algebrico di tutte le funzioni possibili di $x + h$ con potenze ascendenti intere positive di h , e dà poi loro il nome di calcolo differenziale.

... Lagrange si libera di tutto ciò che gli sembra trascendenza metafisica ...

Ciò però non evita che egli abbia bisogno costantemente di una o dell'altra di queste idee metafisiche.”

Quindi Marx basò il suo lavoro sull'idea che il calcolo differenziale andasse rifondato usando solo grandezze finite (il punto di vista di D'Alembert) e che suo fondamento dovesse essere un *algoritmo* di calcolo (punto di vista di Lagrange).

Marx era dunque alla ricerca di un algoritmo per il calcolo differenziale che rendesse conto di *tutti i passaggi di termini alla luce della loro esecuzione effettiva*.

Osserviamo che, nonostante Marx nel suo lavoro abbia fatto riferimento ai soli Newton, Leibniz, D'Alembert e Lagrange, la storia del calcolo differenziale ha avuto molti altri matematici come protagonisti, sia precedenti che successivi al periodo in cui è vissuto Marx. Non va dimenticata infatti tutta la sistemazione logica del calcolo differenziale a partire dal concetto di limite di Cauchy da cui deriva il concetto di infinitesimo e alla quale si sono dedicati matematici come Weierstrass, Dedekind, Riemann e molti altri.

L' introduzione del concetto di limite permise di operare in termini dei soli numeri reali eliminando una volta per tutte l'uso degli infinitesimi definiti solo intuitivamente.

Tralasciando tutti i dettagli di questo percorso storico, accenniamo brevemente all'idea di infinitesimo della seconda metà del XIX secolo e ad una nuova definizione di derivata che ha portato alla formulazione dell'Analisi Non-Standard.

6. CENNO ALL'ANALISI NON STANDARD

Lo sviluppo dell'analisi infinitesimale del XVIII secolo ad opera di Leibniz e Newton si basava sul concetto di grandezza infinitamente piccola, senza che fosse definita rigorosamente dal punto di vista matematico.

Come abbiamo visto, il calcolo funzionava bene introducendo questi elementi infinitesimali ai quali però corrisponde solo una definizione intuitiva: si tratta di grandezze non nulle che però sono minori in valore assoluto di qualsiasi numero reale.

Questa loro caratteristica aveva però portato a delle contraddizioni: abbiamo visto nel calcolo della derivata che gli infinitesimi vengono a volte considerati diversi da zero e questo permette la divisione per il termine dx nel calcolo, altre volte vengono fatti scomparire perché essendo molto piccoli sono prossimi allo zero ma, come aveva anche notato Marx, la cosa strana è che il risultato che si ottiene non è un'approssimazione, ma un risultato esatto, come se fossero effettivamente uguali a zero.

Ci si potrebbe chiedere allora quali siano le regole elementari a cui gli infinitesimi obbediscono e secondo quale criterio si possa eliminare il dx .

Nel 1734 venne pubblicata una spietata critica al metodo infinitesimale di Newton e Leibniz dal vescovo George Berkeley, il quale sosteneva la contraddittorietà della nozione di infinitesimo scrivendo:

“Una volta ammesso che gli incrementi scompaiono, cioè che gli incrementi siano nulli o che non vi siano incrementi, cade la precedente ipotesi che gli incrementi fossero qualcosa, o che vi fossero incrementi, mentre viene mantenuta una conseguenza di tale ipotesi, cioè un'espressione ottenuta mediante essa.”

Il problema venne superato con la rifondazione del calcolo infinitesimale abolendo gli infinitesimi e basandosi sul concetto di limite, ma ciò portò ad una complicazione di definizioni e dimostrazioni.

Ciò permise di costruire l'Analisi moderna.

La prefazione alla prima edizione del libro “Non-standard Analysis” dell'americano Abraham Robinson inizia così:

“Nell'Autunno del 1960 mi resi conto che i concetti e i metodi della Logica Matematica contemporanea potevano fornire un'intelaiatura adatta allo sviluppo del Calcolo Differenziale ed Integrale per mezzo di numeri infinitamente piccoli ed infinitamente grandi.

... La teoria risultante fu chiamata da me *Analisi non-standard* perché coinvolge ed era, in parte, ispirata dai cosiddetti modelli non-standard dell'Aritmetica la cui esistenza era stata sottolineata per primo da T. Skolem ...”

Ci si può chiedere se l'Analisi Non-Standard sia “più potente” dell'Analisi moderna. E' stato dimostrato che le due teorie sono equivalenti nel senso che ogni teorema di Analisi non-standard ha un equivalente in analisi moderna e viceversa.

L'idea di Robinson fu quella di arricchire il campo dei reali con i numeri che Leibniz chiamava *ideali*, gli infinitesimi e gli infiniti, ma in maniera rigorosa, perché fino ad allora questo non era stato fatto.

Robinson fondò l'analisi nuovamente sul concetto di infinitesimo rendendo la teoria semplice e lineare.

Nel 1973 Gödel disse: “*ci sono buone ragioni per credere che l'analisi non-standard, in una versione o nell'altra, sarà l'analisi del futuro*”.

Illustriamo brevemente le idee principali che caratterizzano tale analisi.

Prendiamo come punto di partenza il sistema dei numeri reali $\mathbb{R}$.

E' possibile estendere tale insieme con ${}^*\mathbb{R}$ che viene chiamato sistema dei numeri *iperreali* ed è un campo ordinato più ampio di $\mathbb{R}$. I suoi elementi sono classi di equivalenza di successioni a valori reali e vengono indicati con le lettere greche. Essi godono delle stesse proprietà formali dei numeri reali.

In ${}^*\mathbb{R}$ valgono tutte le usuali regole di calcolo, inoltre ogni tipo di definizione o risultato dell'analisi non-standard può essere interpretato e trasferito nell'ambito dell'analisi moderna e viceversa.

Tra i numeri iperreali troviamo gli infinitesimi, gli infiniti e i numeri finiti.

Gli **infinitesimi** hanno due caratteristiche:

1) Sono numeri minori in valore assoluto di qualsiasi altro reale positivo e diverso da zero, cioè $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}$ è *infinitesimo* se $|\varepsilon| < x, \forall x \in \mathbb{R}_+$.

2) Sono numeri non archimedei, cioè

se $x \in \mathbb{R}_+$ ed $\varepsilon > 0$ è infinitesimo, $\nexists n \in \mathbb{N}$ tale che $n\varepsilon > x$.

Il fatto che un numero ε sia un infinitesimo si può indicare con la scrittura $\varepsilon \approx 0$ e osserviamo che l'unico infinitesimo reale è lo 0.

Gli **infiniti** sono quei numeri maggiori in valore assoluto di qualsiasi altro reale positivo, cioè $\omega \in {}^*\mathbb{R}$ è *infinito* se $|\omega| > x, \forall x \in \mathbb{R}_+$.

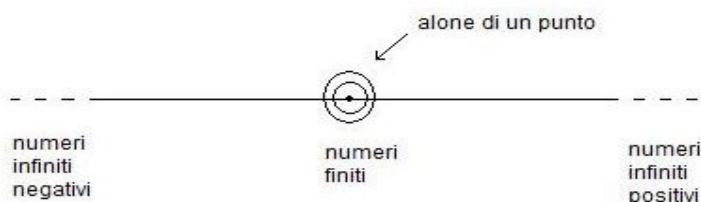
Diremo invece che un numero α è **finito** se $\exists r \in \mathbb{R}_+$ tale che $|\alpha| < r$.

Tutti i numeri finiti sono della forma $x + \varepsilon$ con $x \in \mathbb{R}$ ed $\varepsilon \approx 0$.

Diremo che due numeri sono infinitamente vicini se $\alpha - \beta \approx 0$ e si scrive: $\alpha \approx \beta$.

Questi ultimi punti prendono il nome leibniziano *monade* o *aloni*.

Una visione della retta iperreale potrebbe essere la seguente:



Inoltre, il “teorema della parte standard” afferma che *se α è un numero iperreale finito allora esiste uno ed un solo numero reale x tale che $x - \alpha \approx 0$; x si chiama parte standard di α e si indica con $st(\alpha)$.*

Gli enti fondamentali dell'analisi sono le funzioni ed anch'esse si possono estendere con la procedura “ $*$ ”.

Infatti, data una funzione reale f esiste una corrispondente funzione iperreale $*f$ (il cui dominio e codominio sono sottoinsiemi di ${}^*\mathbb{R}$) chiamata *estensione naturale di f* e tale che se f è data da una certa regola, allora $*f$ è data dalla stessa regola applicata ai numeri iperreali.

A questo punto abbiamo tutti gli elementi per dare la definizione di derivata, ovvero:

Definizione:

Sia f una funzione di variabile reale e x un punto del suo dominio. La derivata di f in x è

$$f'(x) = st \left(\frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} \right), \forall dx \approx 0.$$

Come possiamo osservare, l'operazione di parte standard sostituisce l'operazione di limite che qui non è necessaria. Con questa definizione, pur rimanendo ispirati all'antico metodo infinitesimale, si modifica la definizione di Leibniz e si giunge al risultato evitando ogni contraddizione.

Esempio.

Per calcolare la derivata della funzione $y = x^2$ con il metodo di Leibniz bisognava operare nel modo seguente:

$$dy = f(x + dx) - f(x) = (x + dx)^2 - x^2 = x^2 + dx^2 + 2xdx - x^2 = 2xdx + dx^2.$$

da cui

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xdx + dx^2}{dx} = 2x + dx.$$

A questo punto, per il fatto che dx è infinitesimo, esso può essere eliminato e si arriva alla derivata.

Per lo stesso esempio, ma nell'ambito dell'analisi non-standard si ha:

$$\frac{dy}{dx} = st\left(\frac{2xdx + dx^2}{dx}\right) = st(2x + dx) = 2x$$

che ci dà la derivata attraverso l'eliminazione del termine dx che ora è pienamente giustificata.

7. CONCLUSIONE

La critica di Marx, su cui è basato il suo lavoro, è indirizzata ad un'analisi infinitesimale che dall'Ottocento in poi venne ripresa e perfezionata da diversi matematici.

Dal momento che la recente analisi non-standard è nata per formalizzare il calcolo infinitesimale in seguito alle critiche mosse all'analisi del XVIII secolo e quindi si sviluppa sullo stesso punto di vista di Marx, ci si può chiedere se Marx sarebbe stato d'accordo con questa teoria che finalmente dà una giustificazione all'eliminazione forzata degli infinitesimi.

Riflettiamo sul fatto che, in base all'analisi dei Manoscritti, per Marx le quantità infinitesime (in primo luogo il rapporto $\frac{dy}{dx}$) compaiono solo come ultimo risultato di un processo algebrico ben definito e sono solo un simbolo introdotto per indicare un effettivo annullarsi dell'incremento della variabile indipendente e conseguentemente della sua variabile dipendente.

“ La consolazione a cui si aggrappano alcuni matematici razionalizzanti, cioè che dy e dx siano di fatto soltanto infinitamente piccoli e che il loro rapporto sia solo approssimativamente $\frac{0}{0}$ è una chimera.”

Al contrario, con l'analisi non-standard le quantità infinitesime, che non sono affatto quantità nulle, hanno una loro effettiva esistenza, come nel XVIII secolo, ma stavolta vivono in un insieme che è un'estensione dei reali e godono di proprietà ben definite, quindi non hanno più quell'aspetto mistico di cui parla Marx.

Da un lato quindi, l'analisi tanto criticata da Marx viene ristrutturata in una teoria potente e rigorosa come lui avrebbe voluto, dall'altro lato, però, tale teoria si fonda su concetti matematici sviluppati successivamente al periodo in cui Marx è vissuto, quindi, viste le limitate conoscenze matematiche di Marx, è piuttosto difficile dire se Marx sarebbe stato d'accordo o meno con Robinson.

8. BIBLIOGRAFIA

Karl Marx, *Manoscritti matematici* a cura di Francesco Matarrese e Augusto Ponzio, Dedalo Libri (1975)

Antonio Iannizzotto, *I manoscritti matematici di Karl Marx*

Enrico Giusti, *Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'antichità al novecento*

C.D.Pagani, S.Salsa, *Analisi matematica*, Zanichelli (1999)

Riccardo Dossena, *Introduzione all'Analisi Non-Standard*

http://it.wikipedia.org/wiki/Karl_Marx

<http://www.emsf.rai.it/biografie/anagrafico.asp?d=40>

<http://encyclopedia2.thefreedictionary.com/Marx,+Karl>

<http://www.recensionifilosofiche.it/crono/2007-03/marx.htm>

http://it.wikipedia.org/wiki/Analisi_non_standard