UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado

Relatore
Prof. Lucio Cadeddu

Tesi di laurea di
Alessandra Cauli

Anno Accademico 2007/2008

Ai miei genitori

Indice

Premessa

Tratterò la risoluzione delle equazioni algebriche di terzo e quarto grado. Per il Teorema fondamentale dell'algebra (La Ronde-D'Alembert: 1717, 1783) che afferma che "Un'equazione algebrica $f(z)=0$ di grado $n \geq 1$ in una sola variabile z, a coefficienti complessi o in particolare reali, ammette almeno una radice reale o complessa" sappiamo che la soluzione esiste.

Sappiamo anche che le formule

$$x = -\frac{b}{a} \text{ e } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

forniscono le soluzioni delle equazioni algebriche di primo $ax+b=0$, e, rispettivamente, di secondo grado, $ax^2+bx+c=0$.

La risoluzione di equazioni è una parte fondamentale della matematica anche dal punto di vista storico. Questo tema si trova affrontato già quattromila anni fa nelle tavolette d'argilla dei Babilonesi che testimoniano l'uso del metodo di "completamento del quadrato" per la risoluzione delle equazioni di secondo grado, aggiungendo e togliendo un termine in questo modo: data la generica equazione di secondo grado

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a} \Leftrightarrow x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{(2a)^2} \Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Sembra che gli antichi amassero riportare le loro equazioni di secondo grado al "problema modello" di trovare due numeri di cui siano noti la somma e il prodotto. Tali numeri sono esattamente le due soluzioni dell'equazione di secondo grado scritta nella forma x^2 – (somma) x + (prodotto) = 0. Questo metodo era presumibilmente già noto ad Erone e Diofanto.

Capitolo 1 - Risoluzione di equazioni di terzo grado

1.1 Storia dell'invenzione della formula risolutiva

Nell'Antichità e nel Medio Evo le equazioni di grado superiore al secondo erano affrontate con metodi approssimati.

L'equazione cubica $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, se si eccettuano dei casi particolari, aveva sfidato i matematici fin dai tempi dei Babilonesi quattromila anni fa al punto che, nel 1494, **Luca Pacioli** (1445-1514), nella sua *Summa*, aveva sostenuto che la soluzione dell'equazione cubica generale fosse impossibile. Nella soluzione delle equazioni di terzo grado si erano cimentati anche molti matematici greci e arabi fin dai tempi di Archimede, ma essi erano arrivati a risolvere solo dei casi particolari, senza riuscire a trovare un metodo generale.

Scipione Del Ferro (1465-1526), professore di matematica a Bologna, riesce a risolvere le equazioni cubiche del tipo $x^3 + px = q$ intorno al 1515; egli però non pubblica il suo metodo risolutivo in quanto in tale periodo le scoperte venivano spesso tenute nascoste per poi sfidare i rivali a risolvere lo stesso problema. Scipione Del Ferro rivela tale metodo alla fine della sua vita ad un suo allievo, **Antonio Maria Fior**. La notizia comincia a circolare e sprona Nicolò Fontana da Brescia (1499-1559), detto **Tartaglia** per un difetto di parola causato da una sciabolata in volto presa in giovane età, nel 1512, nel corso d'una battaglia per la difesa di Brescia dai francesi, a cercare la soluzione che trova nel 1530 e risolve le equazioni del tipo $x^3 + px = q$ e $x^3 + px^2 = q$ con p e q positivi. Egli dichiara di aver risolto il problema, ma tiene segreta la formula. Credendo che menta, Fior lo sfida pubblicamente nel 1535 e ognuno dei contendenti propone 30 problemi che l'avversario

Tartaglia

doveva risolvere. Questi "duelli" erano abbastanza comuni all'epoca, con tanto di testimoni, giudice, notaio e posta in denaro. E permettevano a chi ne usciva vincitore di attrarre discepoli a pagamento ed essere chiamati a tenere lezioni in sedi prestigiose. Per questo le scoperte importanti venivano gelosamente custodite. Tartaglia risolve tutti i trenta problemi proposti da Fior in appena due ore, mentre Fior non riesce a risolvere nemmeno uno dei trenta posti da Tartaglia.

Riportiamo alcuni problemi proposti da Fior:

- Trovare un numero che, sommato alla sua radice cubica, dia come risultato sei.
- Un ebreo presta un capitale a condizione che alla fine dell'anno gli venga pagata come interesse la radice cubica del capitale. Alla fine dell'anno, l'ebreo riceve ottocento ducati, tra capitale e interessi. Qual era il capitale?

Alcuni problemi proposti da Tartaglia furono:

- Un vascello sul quale si trovano quindici turchi e quindici cristiani viene colpito da una tempesta e il capitano ordina di gettare fuori bordo la metà dei passeggeri. Per sceglierli si procederà come segue: tutti i passeggeri verranno disposti in cerchio e, cominciando a contare a partire da un certo punto, ogni nono passeggero verrà gettato in mare. In che modo si devono disporre i passeggeri perché solo i turchi siano designati alla sorte per essere gettati in mare?

- Suddividere un segmento di lunghezza data in tre segmenti con i quali sia possibile costruire un triangolo rettangolo.
- Una botte è piena di vino puro. Ogni giorno se ne attingono due secchi, che vengono sostituiti con due secchi d'acqua. In capo a sei giorni la botte è piena per metà d'acqua e per metà di vino. Qual era la sua capacità?

La notizia della brillante vittoria di Tartaglia nella sfida raggiunge **Girolamo Cardano** (1501-1576), medico alla Corte di Milano, filosofo, astrologo e matematico. Tartaglia, date le insistenze di Cardano, finisce per rivelargli il suo metodo, in cambio della solenne promessa di Cardano di mantenere tale metodo segreto. Tartaglia però, invece di scrivere la formula, dà a Cardano una poesia, quasi un indovinello, di cui riporto l'inizio con la traduzione "algebrica":

Girolamo Cardano

Quando che'l cubo con le cose appresso $x^3 + px$

Se agguaglia à qualche numero discreto $= q$

Trovan dui altri differenti in esso. $u - v = q$

Da poi terrai, questo per consueto

Che 'l loro produtto sempre sia eguale $uv = \left(\frac{p}{3}\right)^3$

Al terzo cubo delle cose neto,

El residuo poi suo generale

Delli lor lati cubi ben sottratti $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$

Varrà la tua cosa principale. $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$

Sulle prime Cardano non capisce e chiede aiuto a Tartaglia, che dà una spiegazione più dettagliata. A questo punto Cardano, con l'aiuto del suo pupillo **Ludovico Ferrari** (1522-1565), inizia a lavorare all'equazione di terzo grado, spingendosi oltre le scoperte di Tartaglia e fornendo una dimostrazione rigorosa della soluzione. Ferrari scopre addirittura la soluzione dell'equazione di quarto grado, che lo proietta nel firmamento dei grandi della matematica. C'è un problema: un passaggio della soluzione coinvolge la formula risolutiva del terzo grado, che Cardano ha promesso di non divulgare. Frustrati dall'impossibilità di divulgare le nuove scoperte e avendo saputo che Del Ferro aveva trovato la soluzione prima di Tartaglia, Cardano e Ferrari vanno a trovare Annibale Della Nave, genero di Del Ferro e suo successore all'Università di Bologna. Della Nave mostra loro un manoscritto del suocero con la soluzione dell'equazione, la stessa trovata da Tartaglia. Cardano si ritiene sciolto dalla promessa, e nel 1545 pubblica la sua versione del metodo di risoluzione delle equazioni di terzo grado nel suo monumentale trattato di algebra *Ars Magna,* contenente la soluzione sia dell'equazione di terzo grado sia quella dell'equazione di quarto grado, accreditata a Ferrari. Tartaglia però si ritiene defraudato e inizia una lunga disfida tra lui, Cardano e Ferrari che si conclude con un assembramento nel cortile della chiesa dei frati Zoccolanti di Milano, con centinaia di persone ad assistere. Ma è Ferrari ad uscire vincitore dal primo giorno della disfida. Così Tartaglia


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

Frontespizio dell'Ars Magna

decide di abbandonare Milano, mortificato e pieno d'astio per il torto subito. Muore prima di pubblicare un trattato sull'equazione di terzo grado e oggi le formule sono spesso riportate dai libri di testo come "formule di Cardano", trascurando i contributi di Del Ferro e Tartaglia. Altrettanto ingiustamente Cardano è talora citato come "ladro di formule". Accusa ingenerosa, perché nel suo trattato non attribuisce a se stesso la scoperta. Forse sarebbe bene iniziare a chiamarle formule di Del Ferro-Tartaglia-Cardano: tre autori per un'equazione di grado tre.

Scrivendo con il linguaggio di oggi la soluzione che Cardano fornisce dell'equazione cubica del tipo $x^3 + px = q$, si ottiene la formula seguente:

$$\boxed{x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}}$$

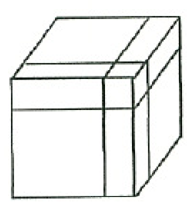
mentre quella dell'equazione cubica del tipo $x^3 + px^2 = q$ è:

$$\boxed{x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2}}}$$

Il matematico che riconobbe per primo la necessità di ampliare i numeri allora conosciuti con altri numeri, fu **Rafael Bombelli** (1526-1573), matematico bolognese. Bombelli nella sua opera *L'Algebra, divisa in tre libri, con la quale ciascuno da sé potrà venire in perfetta cognizione della teoria dell'Aritmetica* si propose di completare i vari casi di risoluzione delle equazioni di terzo grado, anche nel cosiddetto **caso irriducibile**, cioè quando, nella formula di Cardano, si presenta la radice quadrata di un numero negativo $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0$. Nel libro I dell'*Algebra* Bombelli prende in esame le radici immaginarie delle equazioni, che egli chiama *"quantità silvestri"* e giunge ad operare con i numeri che noi oggi chiamiamo "complessi". Nell'*Algebra* si trova così la corretta trattazione di alcune equazioni di terzo grado che, se risolte con il procedimento di Cardano, Del Ferro e Tartaglia, portano a radicali doppi coinvolgenti quantità non reali. Bombelli opera su di essi come se fossero veri numeri, un'astrazione totale per un matematico dell'epoca. A Bombelli spetta quindi il merito di aver introdotto nella matematica i numeri complessi e le conseguenti regole di calcolo oltre a quello di aver svolto la teoria completa delle equazioni di terzo grado, discutendo tutti i casi che si possono presentare, mentre Cardano e Ferrari non avevano sviluppato una teoria completa. Il nome proposto per l'*unità immaginaria* (oggi i) è proprio solo di Bombelli: poiché "non si può chiamare né più, né meno,

però lo chiamerò *più di meno* (+ i) quando egli si dovrà aggiungere, e quando si dovrà cavare lo chiamerò *men di meno* (- i)".

In particolare, partendo da una dimostrazione geometrica basata sulla scomposizione di un cubo in due cubi e sei parallelepipedi, fornisce il metodo per calcolare le soluzioni reali di equazioni del tipo $x^3 + px = q$. Osserviamo il cubo sottostante:



Sia *a* il lato del cubo completo, *(a-b)* il lato del cubo più grande e *b* quello del più piccolo che si forma dalla sezione effettuata. I parallelepipedi che si formano sono tre di base *(a-b)* ed altezza *b*, e tre di base *b* ed altezza *(a-b)*. Unendo ognuno dei maggiori con ognuno dei minori si formano tre parallelepipedi di base *a(a-b)* e altezza *b*.

Assegnate le misure dei lati alle diverse figure, si ha: $x^3 = (a-b)^3 + b^3 + 3b^2(a-b) + 3(a-b)^2 b$, ossia il volume del cubo assegnato è uguale alla somma dei volumi delle figure in cui si scompone.

Svolgendo i prodotti, raccogliendo e portando al primo membro *(a-b)*, si ottiene: $(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3$. L'obiettivo è trovare le soluzioni dell'equazione del tipo $x^3 + px = q$.

Se si prende come incognita la quantità $x = a - b$, ossia il lato del cubo più grande ottenuto dalla scomposizione, e si sostituisce nella precedente equazione si ha l'identità:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3 \Rightarrow x^3 = a^3 - 3abx - b^3 \Rightarrow x^3 + 3abx = a^3 - b^3$$

L'equazione $x^3 + px = q$ si riduce all'identità precedente quando a e b sono tali da rendere

$$\begin{cases} 3ab = p \\ a^3 - b^3 = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = p/3 \\ a^3 - b^3 = q \end{cases}.$$

1.2 Le equazioni di terzo grado presso i babilonesi

I matematici babilonesi affrontarono problemi geometrici che tradotti con un simbolismo algebrico portano ad equazioni di terzo grado.

Le equazioni cubiche del tipo $x^3 = a$ venivano risolte consultando direttamente le tavole dei cubi e delle radici cubiche. Quando il valore cercato non risultava nelle tavole, si ricorreva ad un'interpolazione lineare per ottenere un valore approssimato.

Le equazioni cubiche della forma $x^3 + x^2 = a$ venivano risolte in maniera analoga usando tavole che registravano i valori della combinazione $n^3 + n^2$ per valori interi di n da 1 a 30.

Le equazioni più generali della forma $ax^3 + bx^2 = c$ venivano ricondotte alla forma normale babilonese moltiplicando ciascun termine per $\frac{a^2}{b^3}$ e ottenendo $\left(\frac{ax}{b}\right)^3 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2 = \frac{ca^2}{b^3}$, equazione di terzo grado nell'incognita $\frac{ax}{b}$. Consultando sulle tavole il valore di questa quantità incognita, si determinava il valore di x.

Nelle tavolette dei Babilonesi troviamo anche il problema di cercare le misure di un certo locale e cioè lunghezza, larghezza e profondità, che si indicano rispettivamente con x, y, z. L'enunciato in esse è stato così ricostruito: "La profondità è uguale alla lunghezza. Il volume io ho preso. La sezione [del volume] e il volume ho sommato [e fa] 7/6…Quanto lunghezza e larghezza?"

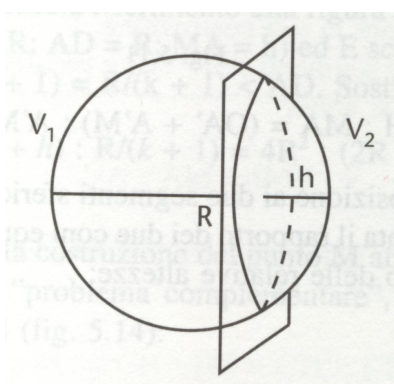
Dalla lettura della tavoletta, le relazioni tra queste misure si possono riassumere nel sistema: $\begin{cases} 12x = z \\ xy + xyz = \frac{7}{6} \\ 2x = 3y \end{cases}$. I calcoli eseguiti nella tavoletta sembrano indicare le sostituzioni tratte dalla prima e dalla terza equazione nella seconda, in modo da ottenere l'equazione: $\frac{2}{3}x^2 + 12\frac{2}{3}x^3 = \frac{7}{6}$. Moltiplicando i due membri per $\frac{12^2}{2/3} = 216$, si ottiene: $(12x)^2 + (12x)^3 = 252$, equazione del tipo $n^3 + n^2 = a$ nell'incognita ausiliaria n=12x che i matematici babilonesi sapevano risolvere o approssimare con l'uso delle tavole numeriche. Nel caso specifico, il matematico babilonese trova 12x=6; da ciò segue, come indicato dalla tavoletta: x=1/2 e di conseguenza y=1/3 e z=6.

Non si può dire, in ogni caso, che i matematici babilonesi risolvessero equazioni di terzo grado: essi erano capaci di affrontare problemi di geometria solida e, una volta determinatasi una relazione traducibile in un'equazione di terzo grado, di approssimare i risultati richiesti mediante opportune tavole numeriche. La scoperta della formula risolutiva delle equazioni di terzo grado dovrà aspettare alcuni millenni prima di entrare nel mondo matematico.

1.3 Un problema archimedeo di terzo grado

I Greci erano in grado di risolvere sistematicamente i problemi di secondo grado. Diversa è la situazione per quelli di terzo grado, dei quali, nelle opere greche, si trovano solo rari esempi, risolti con tecniche diverse dai singoli autori. Ad esempio, il problema proposto da **Archimede** (III secolo a. C.) nella prop. 4 del libro II della sua opera *Sulla sfera e il cilindro* consiste nel:

"Tagliare una sfera data in modo che i segmenti sferici abbiano tra loro lo stesso rapporto dato".



Detto R il raggio della sfera, x la distanza del centro della sfera dal cerchio sezione ed $\frac{l}{m} > 1$ il rapporto dato, il volume del segmento sferico maggiore è:

$$V_1 = \frac{1}{2}\pi(R+x)(R^2 - x^2) + \frac{1}{6}\pi(R+x)^2 = \frac{\pi}{3}(R+x)^2(2R-x)$$

Si ha pertanto: $\frac{\pi}{3}(R+x)^2(2R-x):\frac{4}{3}\pi r^3 = l:(l+m)$, cioè l'equazione che traduce il problema è:

$x^3 - 3R^2x + 2R^3\frac{l-m}{l+m} = 0$. Confrontando con l'equazione cubica della forma $y^3 + py + q = 0$ essendo p<0 e $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$, si vede che la formula cardanica appartiene al tipo irriducibile e, come vedremo, ha tre soluzioni reali. Archimede osserva che il problema è un caso particolare del seguente:

"Dividere un segmento ΔZ in un punto X in modo che XZ stia ad un segmento dato ZΘ, come un quadrato dato sta a $X\Delta^2$" relativo alle condizioni ΔB=2ZB, BZ>ZΘ il che è come dire: mediante sostituzioni l'equazione del problema diventa della forma $x^3 - ax^2 + b^2c = 0$. L'ultima parte del libro che conteneva la risoluzione del problema andò perduta. Nel VI secolo d. C. Eutocio rinvenne un frammento scritto in lingua dorica, la lingua usata da Archimede, contenente l'analisi del problema. In tale frammento la soluzione è ottenuta dall'intersezione della parabola $ax^2 = b^2y$ con l'iperbole (a-x)y=ac.

Un ulteriore esempio di problema di terzo grado si incontra nell'opera di **Diofanto** (III secolo d. C.) e consiste nel trovare un triangolo rettangolo tale che l'area aggiunta all'ipotenusa dia un quadrato, mentre il perimetro è un cubo. Il problema si traduce nell'equazione $x^3 + x = 4x^2 + 4$. Diofanto dà la radice x=4 senza precisare il modo con cui essa è stata ottenuta. Probabilmente egli ha visto che $x(x^2+1) = 4(x^2+1)$ da cui x=4.

1.4 Il metodo di risoluzione di Omar Khayyam

L'equazione di Archimede la si ritrova anche nell'opera del matematico arabo **Almahani**(c.860), che la riporta senza dare nuovi contributi, mettendola tuttavia in così grande evidenza da essere poi chiamata *equazione di Almahani*.

Successivamente Abù Ja'far al-Kharin (c. 960) e Alhazen (c. 1000) affrontarono la soluzione del problema archimedeo con metodi di intersezione di coniche non dissimili da quello di Archimede. Molto più importante è il contributo del matematico persiano **Omar Khayyam** (c. 1100). Nella sua opera *Algebra* egli elabora un metodo generale per riconoscere quando le equazioni di terzo grado hanno radici positive, dando poi una classificazione di queste equazioni in tredici casi, essendo a ciò costretto dal fatto di non considerare coefficienti negativi. Per quanto riguarda la risoluzione delle equazioni cubiche egli generalizza il metodo di usare intersezioni di coniche. Esponiamo il procedimento di Omar Khayyam usando concetti e notazioni moderni. Considerata l'equazione $x^3 + ax^2 + b^2x + c^3 = 0$, si ponga $x^2 = 2py$, si ottiene allora: $2pxy + 2apy + b^2x + c^3 = 0$ che rappresenta un'iperbole mentre la precedente rappresenta una parabola. Se entrambe le curve vengono tracciate con riferimento al medesimo sistema di coordinate, le ascisse dei punti di intersezione rappresentano le radici dell'equazione considerata. Possono essere utilizzate in maniera analoga altre coppie di sezioni coniche. Tale metodo grafico è stato ovviamente ripreso dopo gli studi di Cartesio, in particolare da F. De Sluse ed E. Grégoire (1668).

1.5 Risoluzione di particolari equazioni cubiche

Nell'opera astronomica del matematico persiano **al-Biruni** (c. 1000) viene affrontato il problema della costruzione del poligono regolare di nove lati, riconducendolo alla risoluzione dell'equazione $x^3 = 3x + 1$ della quale l'autore dà il valore approssimato espresso in forma sessagesimale $x = 1^p 52^I 45^{II} 47^{III} 13^{IV}$. Analogamente il problema della costruzione del poligono regolare di diciotto lati è ricondotto all'equazione $x^3 + 1 = 3x$ di cui si dà la soluzione $x = 0^p 20^I 50^{II} 16^{III} 1^{IV}$. Il fatto che al-Biruni dia la soluzione senza alcuna spiegazione fa pensare che procedimenti generali per la risoluzione numerica di tutte le equazioni cubiche fossero di uso corrente nel mondo matematico musulmano. Tuttavia non ci sono documenti a sufficienza per sostenere questa ipotesi.

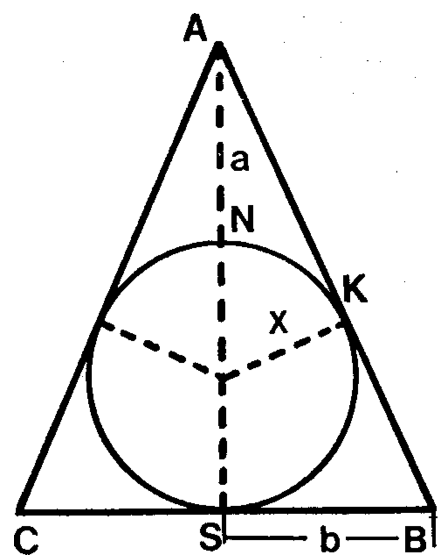
Nel 1225 circa, nella sua opera *Flos*, **Leonardo Fibonacci** fornisce una soluzione dell'equazione $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. La soluzione data, anche in questo caso senza spiegazioni, è la seguente $x = 1^p 22^I 7^{II} 42^{III} 33^{IV} 4^V 40^{VI} = 1 + \frac{22}{60} + \frac{7}{60^2} + \frac{42}{60^3} + \frac{33}{60^4} + \frac{4}{60^5} + \frac{40}{60^6}$.

Notiamo che questa soluzione trasformata in valori decimali è esatta fino alla decima cifra decimale. Essa rappresenta l'approssimazione più accurata di una radice irrazionale di una equazione algebrica che fosse mai stata raggiunta in Europa fino a quella data, e che rimase tale per oltre trecento anni. È importante anche ricordare che Fibonacci, prima di dare la soluzione sopra riportata, dimostra in modo minuzioso ed esauriente che detta soluzione non può trovarsi come rapporto di interi o come numero della forma $a + \sqrt{b}$, dove a e b sono razionali.

Autore di un opera di astronomia è anche il matematico indiano **Bhaskara** (c. 1150), il quale risolve l'equazione $x^3+12x=6x^2+35$. Aggiungendo -8 ai due membri ottiene: $(x-2)^3=27$ da cui $x-2=3$ e $x=5$.

Ancora un astronomo infine è il matematico cinese **Chi'n Chiu-Shao** autore dell'opera *Nove sezioni di matematica* (1257) ove compaiono problemi risolubili per mezzo di equazioni di terzo grado, uno dei quali è il seguente:

Un castello a base circolare ha quattro porte rivolte ai punti cardinali; alla distanza a=3 dalla porta a nord è piantato un albero A visibile dal punto B alla distanza b=9 dalla porta sud; determinare il diametro del castello.



Considerando il punto C simmetrico di B rispetto alla porta S e indicando con x il raggio del cerchio, si ottiene un triangolo ABC circoscritto, la cui area è data da 9(2x+3), oppure da $\left|18+\sqrt{9+6x}\right|x$; si ha quindi l'equazione $2x^3+3x^2=243$. L'astronomo cinese dà la soluzione $x=\frac{9}{2}$ senza giustificazioni. Un possibile artificio per ottenerla è il seguente. Aggiungendo ai due membri $9x^2+54x$ si ottiene: $2x^3+12x^2+18x+36x=9x^2+54x+81+162$ quindi

$2x[(x^2+6x+9)]=9[(x^2+6x+9)]$ da cui una soluzione è $x=\frac{9}{2}$.

1.6 Risoluzione usuale dell'equazione cubica

Il primo passo per risolvere l'equazione di terzo grado $x^3+ax^2+bx+c=0$ (il coefficiente di x^3 si può sempre supporre 1) consiste nel trasformarla mediante la sostituzione $x=y-\frac{a}{3}$ in una priva del termine quadratico:

$$\left(y-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(y-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(y-\frac{a}{3}\right)+c=0 \Leftrightarrow y^3-ay^2+\frac{a^2y}{3}-\frac{a^3}{27}+ay^2-\frac{2}{3}a^2y+\frac{a^3}{9}+by-\frac{ab}{3}+c=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^3-\frac{a^2y}{3}+by+\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c=0 \Leftrightarrow y^3+\left(b-\frac{a^2}{3}\right)y+\left(\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^3+py+q=0 \text{ dove } \begin{cases} p=b-\dfrac{a^2}{3} \\ q=c-\dfrac{ab}{3}+\dfrac{2a^3}{27} \end{cases}.$$

Cerchiamo la soluzione y come somma di due numeri u e v: $y=u+v$. Sostituendo:

$$0=y^3+py+q=(u+v)^3+p(u+v)+q=u^3+3u^2v+3uv^2+v^3+p(u+v)+q=\underbrace{(u^3+v^3+q)}+(u+v)\underbrace{(3uv+p)}$$

Questa è un'equazione in due variabili. Fissato per esempio u, è di terzo grado in v, ed equivale in difficoltà al problema di partenza. Osserviamo che c'è una particolare combinazione di u e v che si può calcolare con mezzi elementari. La si trova imponendo che u e v annullino i termini compresi nelle graffe: $u^3+v^3+q=0$ e $3uv+p=0$, ossia $\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ uv=-\dfrac{p}{3} \end{cases}$. Per risolvere questo sistema eleviamo al cubo la seconda equazione:

$\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$. Dunque di u^3 e v^3 conosciamo la somma e il prodotto. Per cui l'equazione in z $z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$ è presto risolta: $z = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$. Quindi: $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ e $v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ da cui, estraendo le radici cubiche e ricordando che $y = u + v$, si ha infine:

$$\boxed{y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}$$

che è la celebre **formula risolutiva** delle equazioni di terzo grado. Questa formula dà *nove* valori di x, poiché ognuno dei radicali cubici ha tre valori, che si ottengono da uno di essi moltiplicandolo per l'una o per l'altra delle due radici cubiche complesse dell'unità $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Fra questi nove valori occorre però scegliere quelli che soddisfano alla condizione $uv = -\frac{p}{3}$. Le altre vanno scartate. Pertanto, scelto un valore u_1 per il primo radicale cubico, si sceglierà $v_1 = -\frac{p}{3u_1}$ e così si avrà una prima radice $x_1 = u_1 - \frac{p}{3u_1}$ e le altre due saranno: $x_2 = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 v_1$ e $x_3 = \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon v_1$.

Il matematico inglese **A. Cayley** nel 1861 ha proposto un metodo che, partendo dalla formula risolutiva, permette di trovare direttamente le tre radici. Successivamente sono stati trovati metodi di risoluzione che arrivano alla formula di Cayley senza passare attraverso la formula cardanica.

1.7 Discussione del caso di coefficienti reali

Consideriamo il caso in cui i coefficienti dell'equazione cubica siano reali. In questa questione gioca un ruolo essenziale il segno del

$$\boxed{\text{discriminante} = \Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.}$$

Analizziamo i casi in cui $\Delta > 0$, $\Delta<0$ e $\Delta=0$.

Primo caso: $\Delta > 0$.

Se il discriminante è positivo, allora il radicando delle radici cubiche è reale, e fra tutti i radicali cubici ce n'è uno solo reale. Se scegliamo il radicale reale per u, la relazione $uv = -\frac{p}{3}$ assegna un numero pure reale per v, che corrisponde necessariamente al radicale cubico reale per v. Nel caso $\Delta > 0$ la formula risolutiva fornisce quindi una soluzione reale dell'equazione qualora tutti i radicali siano interpretati nel senso reale stretto.

Se vogliamo le altre due radici dobbiamo ricorrere ai radicali complessi: questi sono il prodotto del radicale reale per le due radici cubiche non reali dell'unità $\cos\frac{2\pi}{3} \pm i\sin\frac{2\pi}{3} = -\left(\frac{1}{2}\right) \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} \quad u_2 = u_1\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad u_3 = u_1\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \quad v_2 = v_1\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad v_3 = v_1\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Se $u_1 \neq 0$ e $v_1 \neq 0$, invece di verificare $uv = -\frac{p}{3}$, basta trovare quando $uv \in \nabla$. Infatti questo succede esattamente in tre casi. Nella tabella "si" e "no" sono le risposte alla domanda "$uv \in \nabla$?".

	v_1	v_2	V_3
u_1	si	no	no
u_2	no	no	si
u_3	no	si	no

Quindi, per avere le due soluzioni complesse coniugate basta scegliere segni opposti per u e v nelle parti immaginarie.

Secondo caso: $\Delta < 0$.

I radicandi cubici $-\frac{q}{2} \pm i\sqrt{-\Delta}$ sono complessi coniugati, aventi come modulo R il valore

$$R = \left|-\frac{q}{2} \pm i\sqrt{-\Delta}\right| = \sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{-\Delta}\right)^2} = \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}$$

e come argomento un angolo $\pm\theta$ di cui per esempio la tangente è $\tan\vartheta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{-\frac{q}{2}}$ se $q \neq 0$.

Indichiamo i numeri complessi come coppie modulo-argomento. I valori di u^3 e v^3 sono $u^3=(R,\vartheta)$, $v^3=(R,-\vartheta)$ per cui le radici cubiche sono:

$$u_1 = \left(\sqrt[3]{R}, \frac{\vartheta}{3}\right),\ u_2 = \left(\sqrt[3]{R}, \frac{\vartheta + 2\pi}{3}\right),\ u_3 = \left(\sqrt[3]{R}, \frac{\vartheta + 4\pi}{3}\right)$$

$$v_1 = \left(\sqrt[3]{R}, \frac{-\vartheta}{3} \right),\ v_2 = \left(\sqrt[3]{R}, \frac{-\vartheta + 2\pi}{3} \right),\ v_3 = \left(\sqrt[3]{R}, \frac{-\vartheta + 4\pi}{3} \right)$$

Bisogna scegliere le combinazioni $\{u, v\}$ che soddisfano $uv = -\frac{p}{3}$. In particolare, bisogna che il prodotto sia reale, ossia che gli argomenti abbiano somma nulla (o multipla di 2π). La tabella è identica a quella del caso $\Delta > 0$. Vanno bene le tre coppie $\{u_1, v_1\}$, $\{u_2, v_3\}$, $\{u_3, v_2\}$, in ciascuna delle quali conviene osservare che u e v sono fra loro coniugati. Le tre coppie forniscono tre soluzioni $y = u + v$ tutte reali, perché la somma (oltre che il prodotto) di due numeri complessi coniugati è reale. La parte reale di un complesso è il modulo per il coseno dell'argomento. Ricordando che $\sqrt[3]{R} = \sqrt{-\frac{p}{3}}$, possiamo scrivere una tavola con le soluzioni espresse in termini reali:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= u_1 + v_1 = 2\Re u_1 = 2\Re v_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\vartheta}{3} \\ y_2 &= u_2 + v_3 = 2\Re u_2 = 2\Re v_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\vartheta + 2\pi}{3} \\ y_3 &= u_3 + v_2 = 2\Re u_3 = 2\Re v_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\vartheta + 4\pi}{3} \end{aligned}}$$

Quindi: se il discriminante è negativo, per trovare le tre radici (che sono reali e distinte) bisogna dapprima calcolare l'angolo ϑ, e poi applicare le formule. In quanto a ϑ, una volta che ne è nota la tangente, basta sapere in che quadrante è per determinarlo completamente:

a) Se $-\frac{q}{2} > 0$ allora siamo nel I-IV quadrante e $\vartheta = \arctan\left(\frac{-2\sqrt{-\Delta}}{q} \right)$;

b) Se $-\frac{q}{2} < 0$ allora siamo nel II-III quadrante e $\vartheta = \pi + \arctan\left(\frac{-2\sqrt{-\Delta}}{q} \right)$.

Terzo caso: $\Delta = 0$.

Nel caso particolare $\Delta = 0$, si ha che ϑ=0. Le formule precedenti, ricordando che $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, diventano allora:

$$y_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$$
$$y_2 = y_3 = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

Riassumendo:

Proposizione: Se l'equazione cubica $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ ha coefficienti reali, allora possiede

1) Tutte le radici reali di cui una doppia e una semplice oppure una tripla se $\Delta = 0$;
2) Una radice reale e due complesse coniugate se $\Delta > 0$;
3) Tre radici reali e distinte se $\Delta < 0$.

L'ultimo caso è particolarmente interessante in quanto, benché le radici siano reali, il loro calcolo, secondo la formula risolutiva, necessita dell'estrazione di radici cubiche di numeri complessi.

Esempio. Partiamo dall'equazione $x^3 + 6x = 20$; applicando il procedimento di Tartaglia si ha:

- u – v = 20

- uv = 216/27 = 8

sostituendo la prima nella seconda si ottiene:

(20 + v)v = 8 da cui $v^2 + 20v - 8 = 0$

Applicando la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado si ha $v_{1,2} = -10 \pm \sqrt{108}$.

La radice positiva è $v = \sqrt{108} - 10$, conseguentemente $u = \sqrt{108} + 10$. Infine $x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$.

Utilizzando il metodo di Bombelli, per trovare la soluzione dell'equazione data, posto $x = a - b$, occorre risolvere il sistema: $\begin{cases} ab = 6/3 = 2 \\ a^3 - b^3 = 20 \end{cases}$. Dalla prima equazione, preso $b = 2/a$ e sostituitolo nella seconda equazione, otteniamo $a^3 - 8/a^3 = 20$; facendo il m.c.m. si ha $a^6 - 20a^3 - 8 = 0$. Posto $a^3 = t$, l'equazione si trasforma in $t^2 - 20t - 8 = 0$ che ha come soluzioni, applicando la formula ridotta, $t = 10 \pm \sqrt{100 + 8}$ ma, poiché la nostra incognita è il lato di un cubo, la soluzione negativa non sarà accettabile. Quindi si avrà $a = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}}$ e $b = 2/\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}}$, che razionalizzando si può scrivere come: $b = \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$. Quindi $x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} - (-\sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}) = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$.

Ora

$$\left(\sqrt{3} + 1\right)^3 = 3\sqrt{3} + 3 \times 1 \times \sqrt{3} + 3 \times 1 \times 3 + 1 = 10 + 6\sqrt{3}$$

e poiché

$$\sqrt{108 + 10} = \sqrt{3^3 \times 2^2} + 10 = 2 \times 3\sqrt{3} + 10 \Rightarrow \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{3} + 1\right)^3} = \sqrt{3} + 1$$

Operando allo stesso modo su $\sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$

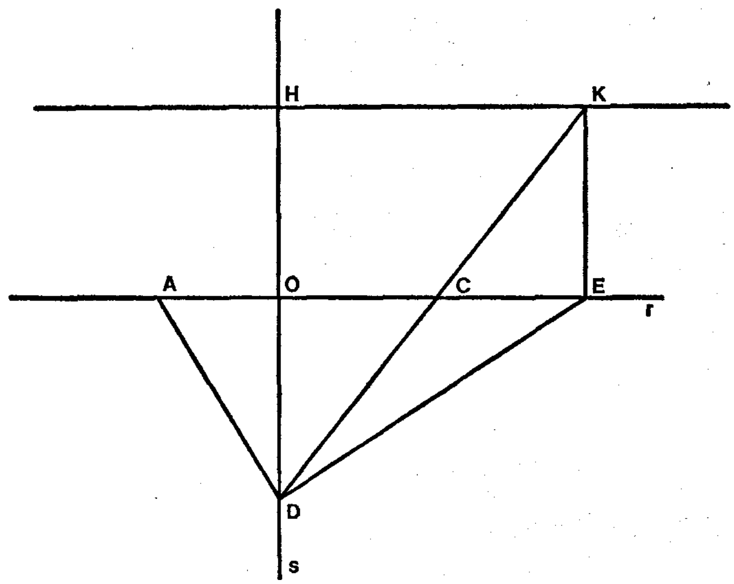
si ha che $x = \sqrt{3} + 1 - \left(\sqrt{3} - 1\right) = 2$

1.8 Il caso irriducibile

Consideriamo di nuovo l'equazione cubica nella forma ridotta e a coefficienti reali $x^3 + px + q = 0$. Se $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ allora l'equazione data ha tre radici reali, infatti in questo caso u^3 e v^3 sono numeri complessi coniugati, ma $uv = -\frac{p}{3}$ è reale, quindi anche u e v sono complessi coniugati, infine anche ε, ε^2 sono fra loro complessi coniugati, pertanto i tre valori dati dalla formula risolutiva sono reali e distinti. Osserviamo però che le radici reali si ottengono operando su quantità immaginarie, perciò sorge naturale il problema di vedere se esse si possono ottenere anche con procedimenti algebrici su quantità reali. Posto $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = a \pm ib$ il problema consiste nel determinare i numeri reali a e b con un numero finito di operazioni razionali ed estrazioni di radice su p e q. Se il problema precedente fosse risolubile, basterebbe determinare a, in quanto allora 2a sarebbe radice dell'equazione e le altre due radici si otterrebbero risolvendo l'equazione di secondo grado $\frac{x^3 + px + q}{x - 2a} = 0$. Tuttavia è stato dimostrato, per la prima volta da Paolo Ruffini (1765-1822), che il problema è impossibile quando $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, da cui il nome di caso irriducibile.

Cardano, che già nell'*Ars Magna* aveva fatto menzione del caso irriducibile, notando che in questa situazione si può ancora applicare la regola ma si ottengono soluzioni, che egli chiama "sofistiche", riprende poi la questione in *Regula Aliza Libellus* edito nel 1570. In quest'opera egli esamina alcuni artifici per giungere alle soluzioni reali nel caso irriducibile senza passare attraverso le radici "sofistiche". Esponiamo, in linguaggio moderno, uno dei casi trattati da Cardano, cioè la soluzione dell'equazione $x^3 = 20x + 32$. Aggiungendo ad ambo i membri a^3, si ottiene: $x^3 + a^3 = 20x + 32 + a^3$ da cui dividendo ambo i membri per x+a si ha: $x^2 - ax + a^2 = \frac{20\left[x + \frac{32 + a^3}{20}\right]}{x + a}$. Determiniamo ora a in modo che sia $\frac{32 + a^3}{20} = a$, cioè $a^3 - 20a + 32 = 0$ che coincide con l'equazione di partenza quando in essa si ponga x=-a. Una radice intera positiva di questa equazione è 2 e quindi le tre radici dell'equazione di partenza sono -2, $1 - \sqrt{17}$, $1 + \sqrt{17}$.

Il procedimento applicato da Cardano in questo caso corrisponde al porre x=-z, in modo che la nuova equazione abbia una radice intera positiva che si può determinare per tentativi; un tale procedimento fu usato in seguito anche da Bombelli. Il merito di avere completamente analizzato e risolto il caso irriducibile è del matematico bolognese Rafael Bombelli. Le sue ricerche sono esposte nel suo trattato *L'algebra* scritto intorno al 1560 e pubblicato nel 1572, in cui sono inoltre raccolti e coordinati tutti i contributi dati dai matematici della Scuola Bolognese della prima metà del secolo XVI. Per meglio comprendere come Bombelli sia giunto alla trattazione del caso irriducibile è utile ricordare come egli, nel primo libro de *L'algebra*, analizzi dettagliatamente la struttura di un corpo aritmetico contenente irrazionalità quadratiche e cubiche, osservando che l'aggiunta di irrazionali quadratici è sufficiente per risolvere le equazioni di secondo grado, mentre l'aggiunta di irrazionali cubici serve per risolvere le equazioni di terzo grado. Tuttavia Bombelli osservò che nel caso delle equazioni cubiche bisogna aggiungere anche quelle particolari irrazionalità cubiche che si presentano nel caso irriducibile. Poiché non esistono numeri reali in grado di rappresentare la radice quadrata di numeri negativi, Bombelli riconobbe la necessità di aggiungere nuovi numeri, che furono detti *immaginari*, adatti a rappresentare tali radici. Bombelli indicò tali numeri con simboli della forma ap.d.m.b. (a più di meno b) e am.d.m.b. (a meno di meno b) corrispondenti alla forma moderna a+ib, a-ib, ne stabilì le leggi formali di calcolo e ne diede varie applicazioni. In particolare dimostrò l'esistenza di radici reali per un'equazione cubica nel caso irriducibile quando esiste una radice razionale. Il procedimento seguito da Bombelli per risolvere questo problema è il seguente. Dapprima egli dimostra che il problema di risolvere una equazione cubica del tipo $x^3 + px + q = 0$, con p e q reali e $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$, è equivalente al problema di determinare due razionali u e v in modo che dati i due razionali m ed n si abbia $\sqrt[3]{m \pm i\sqrt{n}} = u \pm i\sqrt{v}$. Separando i due casi e sommando uno all'altro si ha $2u = \sqrt[3]{m+i\sqrt{n}} + \sqrt[3]{m-i\sqrt{n}}$ e quindi attraverso gli immaginari si ottiene una radice reale dell'equazione. Il problema di trovare u e v si riconduce a quello di trovare u, v tali che $u^2 + v = \sqrt[3]{m^2+n}$ $u^3 - 3uv = m$. Il problema può essere risolto per tentativi nel caso in cui l'equazione proposta abbia una radice razionale. Nel caso in cui l'equazione abbia invece una radice reale e positiva Bombelli dà la seguente dimostrazione geometrica dell'esistenza di detta radice, dimostrazione notevole che già un secolo prima di Cartesio fa uso del segmento unitario ed è la prima dimostrazione di esistenza per "continuità" storicamente nota. L'equazione da considerare è pertanto la seguente: $x^3 = px + q$. Sulle rette ortogonali r ed s si prendono i segmenti AO=1, OH=q/p e per H si conduce la parallela ad AO. Si considera poi un punto D sulla s e si pone DO=α>0. si congiunge D con A e si manda da D la perpendicolare alla DA; indichiamo con E il punto di intersezione tra la r e questa perpendicolare. Indichiamo poi con K il punto di intersezione tra la retta per H e la perpendicolare a quest'ultima da E. uniamo D con K ed indichiamo con C il punto di intersezione con la r.



Si ha:

AO:OD=OD:OE

Cioè

α^2=OE=HK

Dai triangoli simili DOC,DHK si ha:

OC:OD=HK:HD

$$\frac{OC}{\alpha}=\frac{\alpha^2}{\alpha+\frac{p}{q}}$$

Cioè

$$OC=\frac{\alpha^3 p}{\alpha p+q}$$

Se ora facciamo variare α con continuità da 0 a $+\infty$, il segmento OC crescerà con continuità da 0 a $+\infty$, dunque esisterà un valore positivo di α ed uno solo, per il quale si avrà

$p = \frac{\alpha^3 p}{\alpha p + q}$ o, infine $\alpha^3 = \alpha p + q$. Il segmento così determinato è dunque radice dell'equazione proposta, e questa perciò avrà sempre una radice positiva ed una sola. Osserviamo che l'argomentazione precedente assicura solo l'esistenza della radice positiva dell'equazione, ma non è una costruzione geometrica della stessa in quanto il punto C, per cui il segmento OC dà il valore della radice, non è costruibile con riga e compasso.

Ricordiamo infine che Bombelli dimostrò in un caso particolare, ma con procedimento del tutto generale, l'equivalenza del problema della trisezione dell'angolo con quello del caso irriducibile dell'equazione cubica. Sul caso irriducibile dell'equazione cubica sono anche da ricordare gli studi di F. Nicole, il quale nel 1738 pubblicò un lavoro contenente un procedimento per togliere la parte immaginaria della formula risolutiva, mediante sviluppo in serie binomiale dei radicali cubici che vi compaiono. Osserviamo che tale algoritmo è infinito.

1.9 Altri procedimenti risolutivi

Nel corso dei secoli numerosi matematici hanno continuato a proporre nuovi metodi per risolvere l'equazione cubica; ci limitiamo ad esporne solo alcuni.

Cominciamo da metodi per l'equazione nella forma $x^3 + px + q = 0$ che conducono alla $z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$, detta **risolvente di Tartaglia**. **F. Viète** (1591) perviene ad essa operando con le seguenti sostituzioni $z_1{}^2 + xz_1 = \frac{p}{3}$ e $z_2{}^2 - xz_2 = \frac{p}{3}$ da cui segue $x=z_2-z_1$. Inserendo successivamente le sostituzioni nell'equazione di partenza si trovano rispettivamente le equazioni $z^6 \mp qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0$, da cui si ricavano z_1 e z_2.

L. Eulero (1764) pone $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$, da cui, elevando al cubo ambo i membri, ottiene:

$$x^3 - 3\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}x - (A+B) = 0$$

che confrontata con l'equazione di partenza dà $p = -3\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}$, cioè $-\frac{p}{3} = \sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}$ e $q = -(A+B)$.

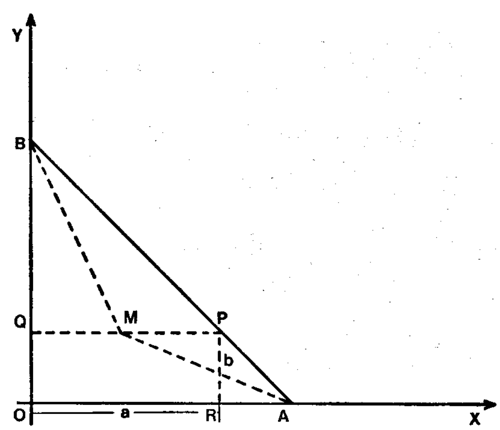
E. Bézout (1765) pone $x = z_1 t + z_2 t^2$ con $t^3=1$, da cui $y^3 - 3z_1 z_2 y - (z_1{}^3 + z_2{}^3) = 0$ che confrontata con l'equazione di partenza dà $p = -3z_1 z_2$, $q = -(z_1{}^3 + z_2{}^3)$.

Altri procedimenti di risoluzione interessanti consistono nel ridurre il primo membro della $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alla somma di due cubi, in particolare a forma binomia, sia direttamente che con cambiamenti di variabile. Di tali procedimenti ricordiamo quello di **L. Matthissen** (1870) il quale opera con una sostituzione tale da portare ad una formula risolutiva del tipo di **falsa posizione**. La sostituzione da eseguire è la seguente: $x = \frac{z_1 - yz_2}{1-y}$ e perché l'equazione si riduca alla forma binomia $y^3 + k = 0$ è necessario porre: $3z_1 z_2 + a(z_1 + z_2) + b = az_1 z_2 + b(z_1 + z_2) + 3c = 0$. Risulta, eseguendo i calcoli, $y^3 = \frac{f(z_1)}{f(z_2)}$, si ha quindi la formula di risoluzione $x = \frac{z_1\sqrt[3]{f(z_2)} - z_2\sqrt[3]{f(z_1)}}{\sqrt[3]{f(z_2)} - \sqrt[3]{f(z_1)}}$. Altre formule risolutive, più precisamente quelle dovute a E. W. Von Tschirnhaus e Lagrange verranno esposte quando si parlerà del contributo di questi autori alla teoria delle equazioni.

1.10 Risoluzioni geometriche

Non è possibile risolvere geometricamente un'equazione di terzo grado, facendo uso in generale, per la costruzione grafica delle radici, solo della riga e del compasso. Riportiamo due interessanti costruzioni elementari, nelle quali si procede per tentativi. Quella che segue è stata data dal topografo C. Botto nel 1932.

Fissato in un piano un sistema di assi cartesiani ortogonali, si prende nel primo quadrante un punto P=(a, b) e un punto M=(a/2, b) e sia AB una corda per P che incontri gli assi in due punti A, B equidistanti da M. Osserviamo che è proprio la corda AB che non si può costruire direttamente con riga e compasso, si deve procedere per tentativi e usare la riga e il compasso come strumenti di controllo. Indichiamo con R e Q i piedi delle perpendicolari abbassate da P sugli assi e poniamo RA=z, QB=y.



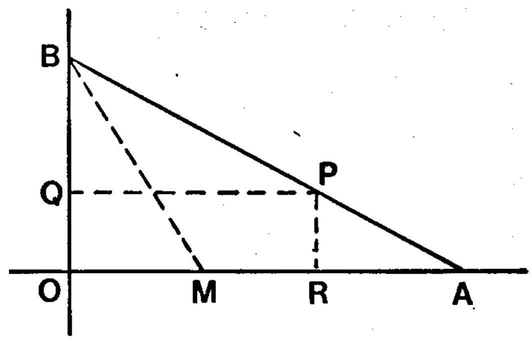
La similitudine dei triangoli BQP, PRA ci dà: QB:PR=QP:RA

$$y = \frac{ab}{z}.$$

E poi $MB^2 = y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ $MA^2 = b^2 + \left(z + \frac{a}{2}\right)^2$. Poiché MA=MB: $y^2 + \frac{a^2}{4} = \left(z + \frac{a}{2}\right)^2 + b^2$ ossia

$y^2 = z^2 + az + b^2 \Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{z^2} = z^2 + az + b^2$. Eseguendo i calcoli: $z^3 + b^2 z - ab^2 = 0$ che possiamo scrivere $z^3 + pz - q = 0$ ponendo $b^2=p$, $ab^2=q$. Se si vuole che l'equazione $z^3 + b^2 z - ab^2 = 0$ comprenda anche l'equazione $z^3 + pz + q = 0$ bisogna supporre a<0, ossia fare la costruzione nel secondo quadrante degli assi.

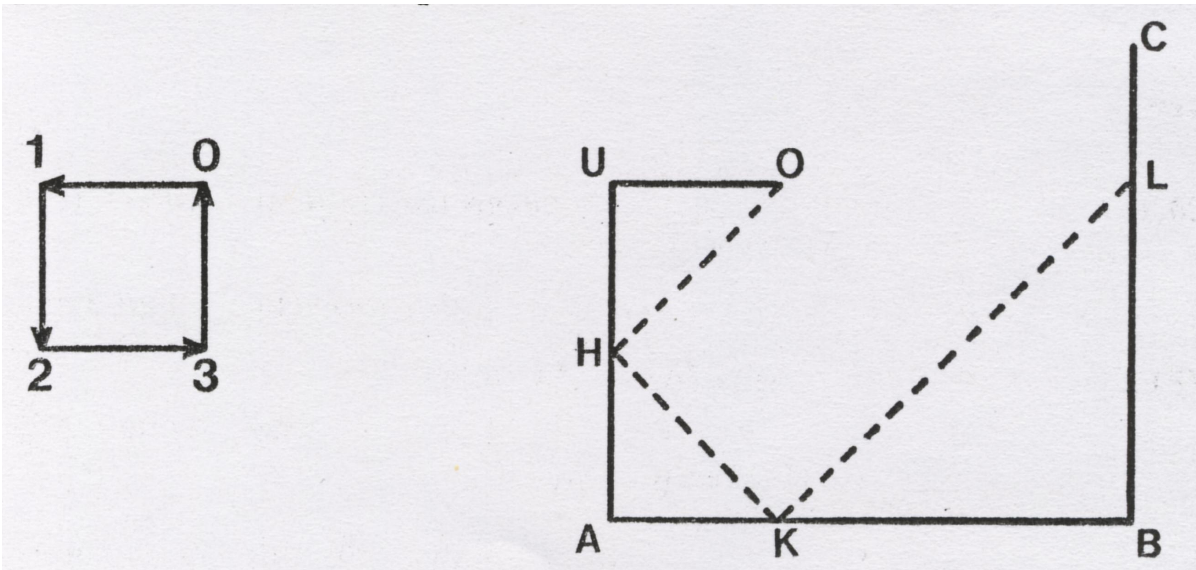
Se ora poniamo M nel punto medio di OR



per la similitudine dei triangoli BQP, PRA e per la condizione MA=MB si trova $y = \frac{ab}{z}$ e la relazione $(y+b)^2 + \frac{a^2}{4} = \left(z + \frac{a}{2}\right)^2$ dalla quale l'equazione $z^3 - b^2 z - ab^2 = 0$ che si può scrivere $z^3 - pz - q = 0$ ponendo, al solito, $b^2=p$, $ab^2=q$. Se vogliamo che l'equazione $z^3 - b^2 z - ab^2 = 0$ comprenda anche l'equazione $z^3 - pz + q = 0$ possiamo fare la costruzione nel secondo quadrante. Osserviamo che nell'abbassare l'equazione dal quarto al terzo grado sopprimendo il fattore comune z+a, si perde la radice z=-a per la quale il punto A coinciderebbe con O e la corda AB per P diverrebbe la OP. Notiamo infine che attraverso la costruzione esaminata è possibile avere informazioni sull'esistenza e sul numero delle radici reali.

Un'altra costruzione grafica per tentativi, per mezzo della quale è possibile costruire le radici reali di un'equazione algebrica di grado n qualunque, è quella data da **E. Lill** nel 1867.

Per il caso n=3 si procede nel modo seguente. Indichiamo con 0,1,2,3 i vertici di un quadrato di lato unitario, sul contorno del quale è fissato un verso positivo.



A partire da un punto arbitrario O si porti OU equipollente a 01, da U si porti UA=a parallelamente ad 12 e da A si porti AB=b parallelo a 23, e da B si porti BC=c parallelo a 30, sempre tenendo conto dei segni. Considerato poi un punto qualunque H su UA e tracciati OH, HK perpendicolare ad OH, KL perpendicolare ad HK, se si pone HU=x, in grandezza e segno, risulta x=tgUOH e quindi HA=x+a KB=x(x+a)+b

$LC = x[x(x+a)+b]+c = x^3 + ax^2 + bx + c$. Quindi se si riesce per tentativi a ottenere che L cada in C, HU sarà radice dell'equazione.

1.11 Risoluzioni trigonometriche

Per esprimere le radici dell'equazione $x^3 + px + q = 0$ in forma trigonometrica, si può procedere in due modi: confrontando l'equazione data con una opportuna identità trigonometrica oppure uguagliando alcune parti della formula risolutiva ad espressioni trigonometriche in modo che poi tutta la formula possa venire espressa ancora in forma trigonometrica. Cominciamo ad esaminare il caso irriducibile: si ha allora $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ e quindi p<0. Operiamo la sostituzione x=ry nell'equazione di partenza ottenendo così $y^3+\frac{p}{r^2}y+\frac{q}{r^3}=0$. Confrontiamo questa con l'identità trigonometrica $\cos^3\frac{\varphi}{3}-\frac{3}{4}\cos\frac{\varphi}{3}-\frac{1}{4}\cos\varphi=0$. Si ottiene: $r=2\sqrt{-\frac{p}{3}}$ $\cos\varphi=-\frac{1}{2}q\sqrt{-\frac{27}{p^3}}$. Quindi le radici dell'equazione di partenza sono:

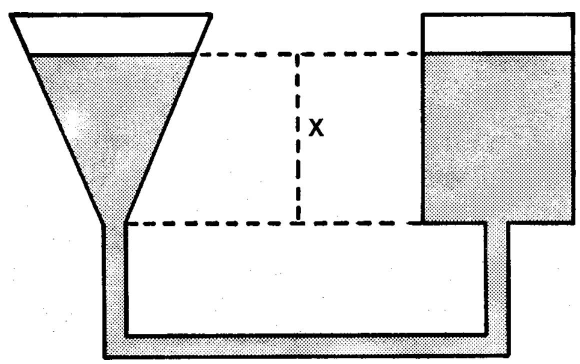
$$\begin{aligned}
x_1 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}\\
x_2 &= -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{1}{3(\pi-\varphi)} = -\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3}+\sqrt{3}sen\frac{\varphi}{3}\right).\\
x_3 &= -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{1}{3(\pi+\varphi)} = -\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3}-\sqrt{3}sen\frac{\varphi}{3}\right)
\end{aligned}$$

Si può pervenire alle stesse espressioni riducendo direttamente la formula risolutiva a forma trigonometrica ponendo $-\frac{q}{2}=\rho\cos\varphi$ e $\sqrt[3]{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}=i\rho sen\varphi$. L'equazione $y^3+\frac{p}{r^2}y+\frac{q}{r^3}=0$ può essere anche confrontata con le identità $sen^3\frac{\varphi}{3}-\frac{3}{4}sen\frac{\varphi}{3}+\frac{1}{4}sen\varphi=0$ e $tg^3\frac{\varphi}{3}-2tg\varphi tg^2\frac{\varphi}{3}-3tg\frac{\varphi}{3}+tg\varphi=0$. Nel caso in cui $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$e p>0 si può porre $tg\varphi=-\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3\frac{2}{q}$ con $0<\varphi<\pi$. Si ha allora $\frac{q}{2}=-\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3 ctg\varphi$, $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{p^3}{27}\frac{1}{sen^2\varphi}$; per cui posto ulteriormente $\sqrt[3]{tg\frac{\varphi}{2}}=tg\psi$ con $0<\psi<\pi$, si ha: $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt{\frac{p}{3}}ctg\psi$; $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=-\sqrt{\frac{p}{3}}tg\psi$, dalle quali le radici dell'equazione.

Infine quando $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$ e p<0, si può porre $sen\varphi=\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3\left(-\frac{2}{q}\right)$ con $0<\varphi<\pi$ e procedere in modo analogo.

1.12 Metodi pratici per la risoluzione di equazioni cubiche

Nel 1898 **A. Demanet** ha ideato un apparecchio idrostatico che riesce assai pratico per la risoluzione di un'equazione di terzo grado ridotta alla forma $x^3 \pm x = c$ con c>0. Esso è basato sull'uso di vasi comunicanti di forma convenientemente stabilita. Per risolvere l'equazione $x^3+x=c$ si prendono come vasi comunicanti un cono di rivoluzione con vertice in basso il cui raggio di base r e l'altezza a siano nel rapporto $\frac{r}{a}=\sqrt{\frac{3}{\pi}}$ e un cilindro di base uguale ad un centimetro quadrato.



Se si versano c centimetri cubici di liquido in uno dei due vasi comunicanti il liquido si innalza ad una medesima altezza h in ciascuno dei due vasi. Il volume di liquido contenuto nel vaso conico è allora uguale ad h^3: $V=\frac{r^2\pi h}{3}$, ma poiché $\frac{r}{h}=\sqrt{\frac{3}{\pi}}$, $V=\frac{r^2\pi h h^2}{3h^2}=h^3$ e quello contenuto nel vaso cilindrico è uguale ad h. Si ha dunque $h^3+h=c$.

Per risolvere l'equazione $x^3-x=c$ si introduce, nello stesso vaso conico isolato, un solido cilindrico di un centimetro quadrato di base, in modo che il volume versato c sia la differenza del volume h[3] del liquido che conterrebbe il cono se il pezzo cilindrico fosse isolato e del volume h del cilindro.

L'altezza osservata h del liquido versato fornisce dunque una radice dell'equazione $x^3 - x = c$. Osserviamo che questo procedimento può estendersi facilmente alle equazioni trinomie qualsiasi, purchè esse possano mettersi nella forma $x^m \pm x^n = c$.

Altri metodi pratici consistono, ad esempio, nell'uso di un quadrilatero articolato (A.Greenhill, 1874), nell'uso del regolo calcolatore logaritmico (H. Ilgner, 1915) o di apposite tavole numeriche. Ricordiamo infine che nel 1961 è stato ideato da G.C. Citterio un apposito regolo per determinare, senza alcun calcolo preliminare o aggiuntivo, le radici reali e complesse di un'equazione cubica della forma $x^3 + px + q = 0$.

1.13 Risoluzione di equazioni di terzo grado tramite studio di funzione

Le soluzioni di un'equazione del tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ possono essere interpretate come i punti nei quali la funzione polinomiale $y = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ha valore zero.

Consideriamo in particolare la funzione $f(x) = x^3 + 3px + 2q$ e cerchiamone i massimi ed i minimi:

$$f'(x) = 3x^2 + 3p = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 + p) = 0 \Rightarrow x^2 = -p$$

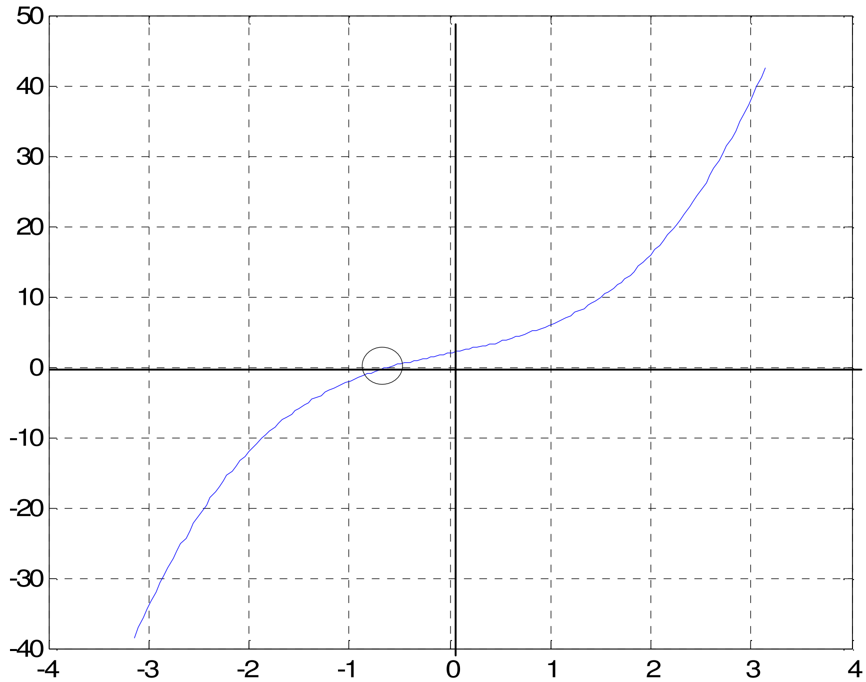
- **Caso** $p > 0$: $f''(x) = 6x$

e $f'(x) > 0$ sempre, cioè $f(x)$ crescente $\Rightarrow$ flesso in $x = 0$

0

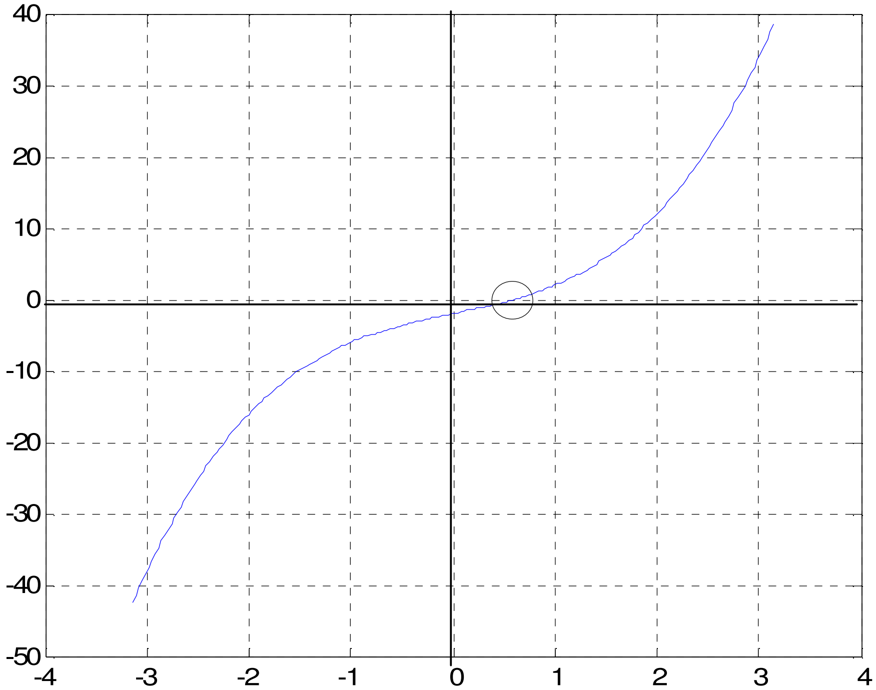
$f(F) = 2q \Rightarrow F(0{,}2q)$ Abbiamo due possibilità:

1. $q > 0$



Una soluzione reale negativa

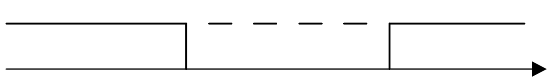
2. $q < 0$



Una soluzione reale positiva

- **Caso** $p < 0$

I punti stazionari sono: $x = \pm\sqrt{-p}$



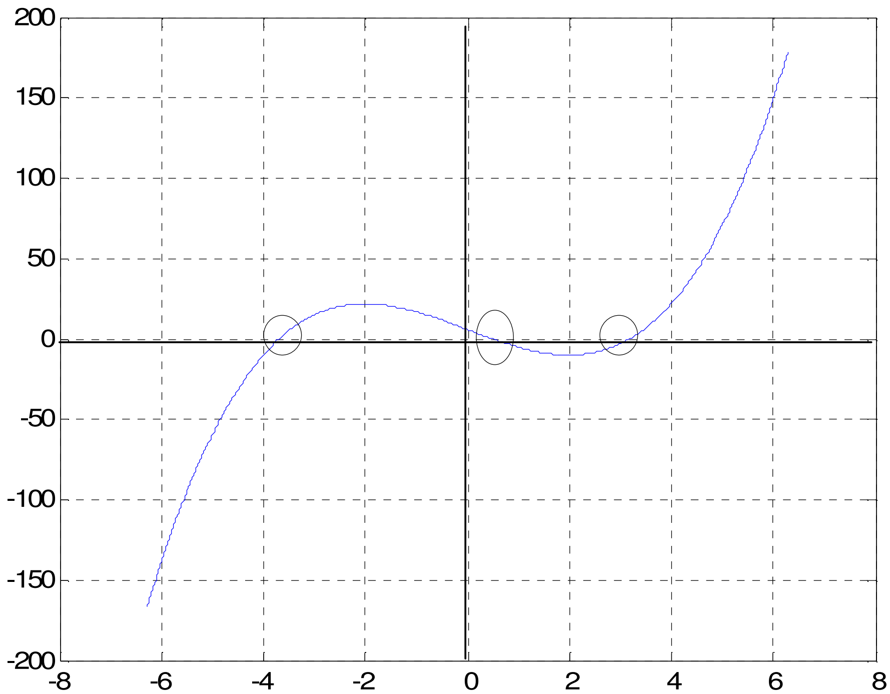
M= $-\sqrt{-p}$ m= $\sqrt{-p}$

$$f(M) = (-\sqrt{-p})^3 + 3p(-\sqrt{-p}) + 2q = p\sqrt{-p} - 3p\sqrt{-p} + 2q = -2p\sqrt{-p} + 2q$$

$$f(m) = (\sqrt{-p})^3 + 3p(\sqrt{-p}) + 2q = 2p\sqrt{-p} + 2q$$

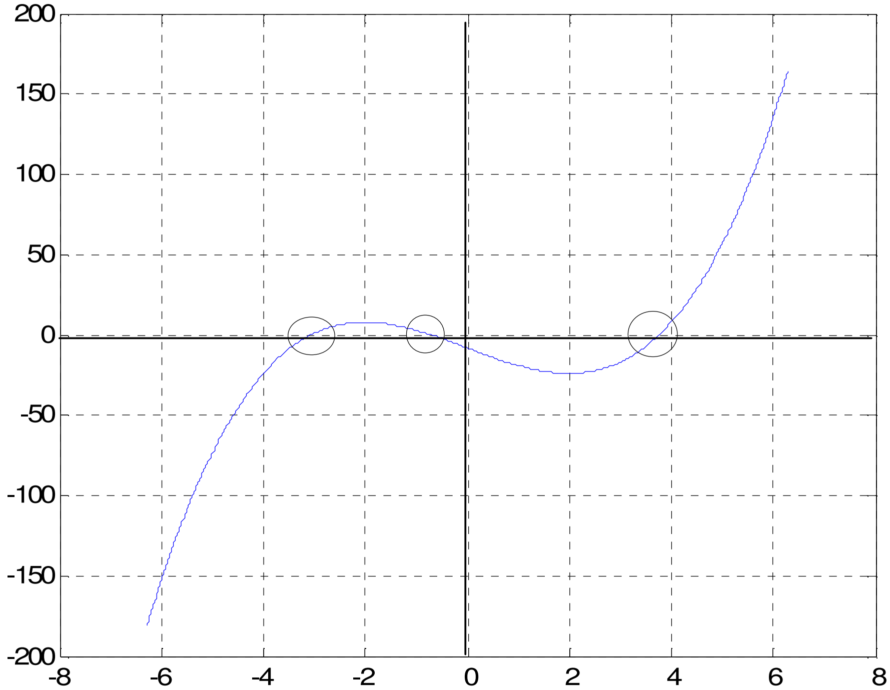
$F(0,2q)$

1. $q > 0$



Tre soluzioni reali e distinte: una negativa e due positive

2. $q < 0$



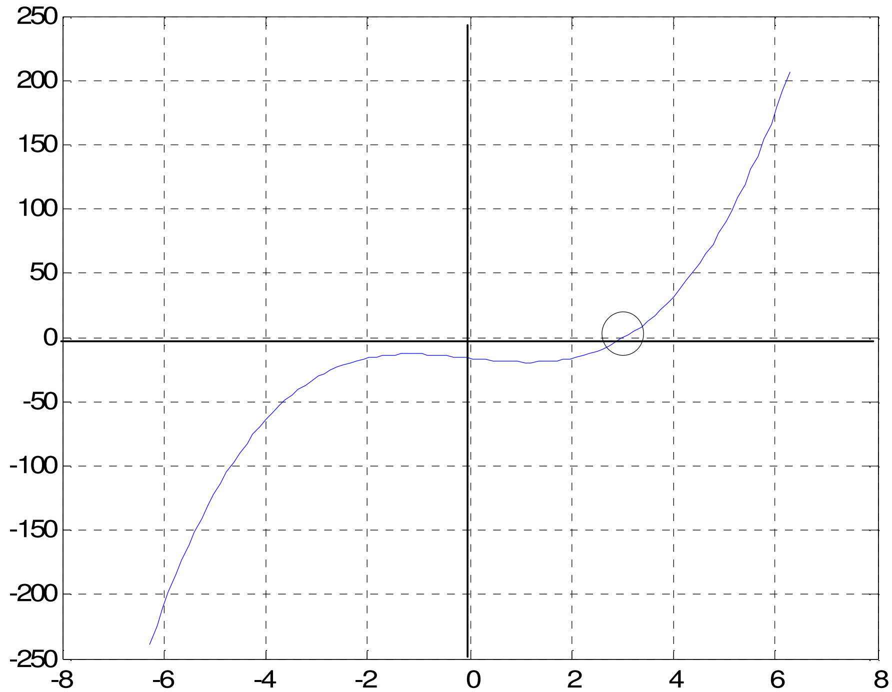
Tre soluzioni reali e distinte: due negative e una positiva

Analizziamo in dettaglio gli ultimi due casi appena trattati, cioè

– $p < 0$, $q < 0$

e $f(M) = 2(q - p\sqrt{-p}) > 0$ se $q - p\sqrt{-p} > 0 \Leftrightarrow q > p\sqrt{-p} \Rightarrow$ Tre soluzioni reali

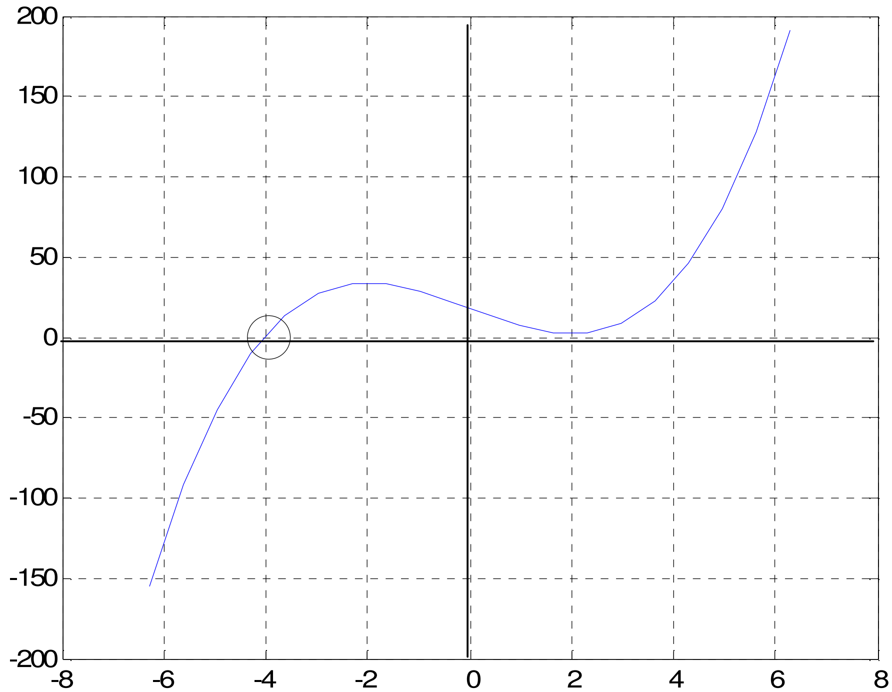
Ma se $f(M) < 0$, cioè se $q - p\sqrt{-p} < 0 \Leftrightarrow q < p\sqrt{-p} \Rightarrow$ Una soluzione reale e due complesse coniugate.



– $p < 0$, $q > 0$

Se $f(m) = 2(q + p\sqrt{-p}) < 0$, cioè se $q < -p\sqrt{-p} \Rightarrow$ Tre soluzioni reali

Se $f(m) = 2(q + p\sqrt{-p}) > 0$, cioè se $q > -p\sqrt{-p} \Rightarrow$ Una soluzione reale e due complesse coniugate.

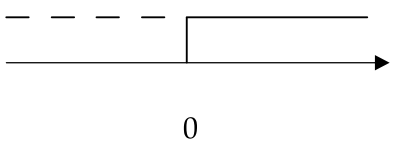

200
150
100
50
0
-50
-100
-150
-200
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

1.14 Esempi

1) $f(x) = x^3 + 3x + 2$ $\qquad\qquad p > 0, q > 0$

$f'(x) = 3(x^2 + 1) > 0$ sempre

$f''(x) = 6x \Rightarrow$ Flesso in $F(0,2)$



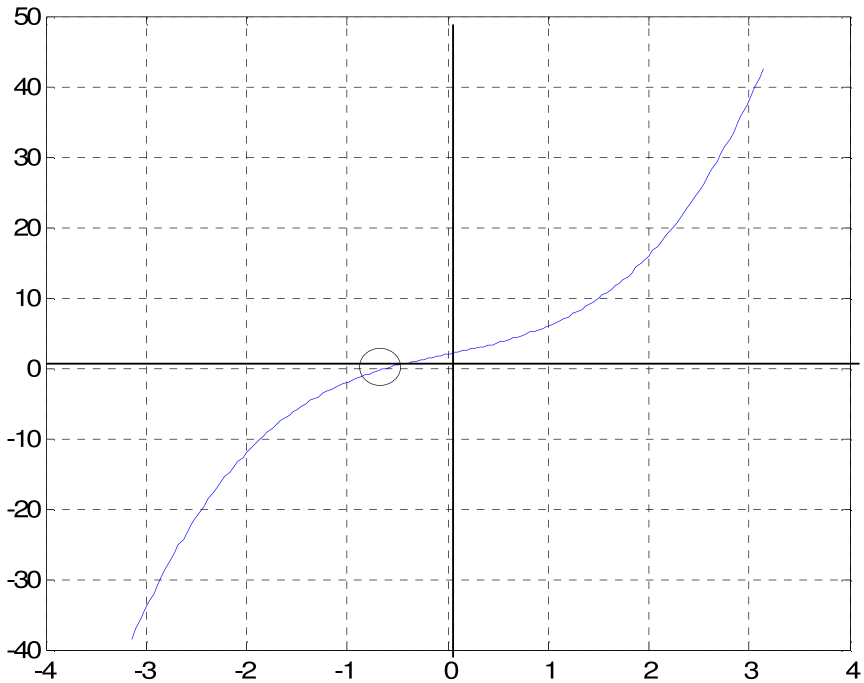
Abbiamo una soluzione reale negativa.

Applicando la formula risolutiva:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{2}{2} + \sqrt{\frac{4}{4} + \frac{27}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{2}{2} - \sqrt{\frac{4}{4} + \frac{27}{27}}} =$$
$$= \sqrt[3]{-1 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{2}}$$

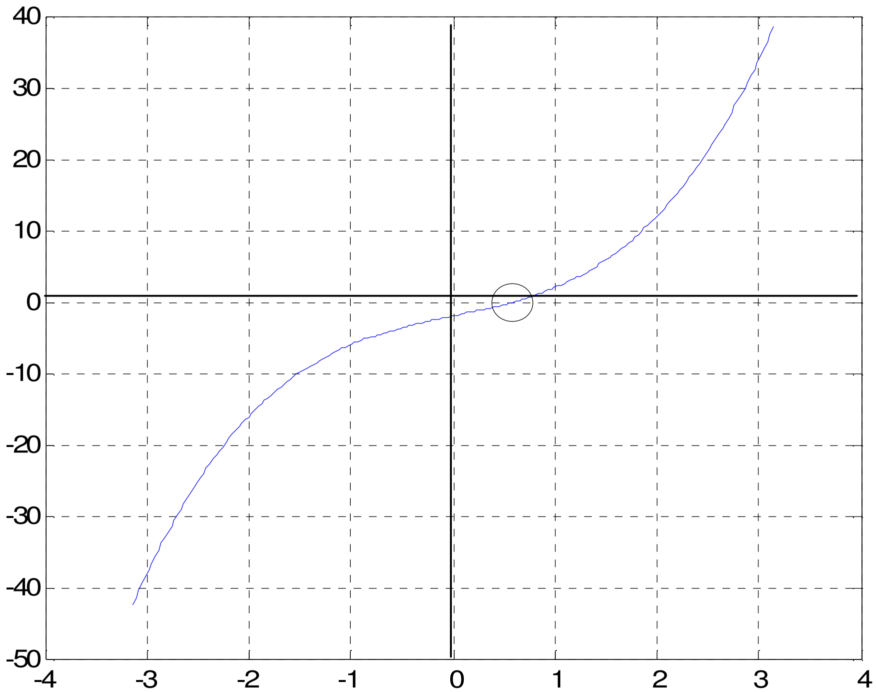
Ma $x = y - \frac{a}{3}$, quindi:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{2}} - \frac{3}{3} = \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{2}} - 1 < 0 .$$



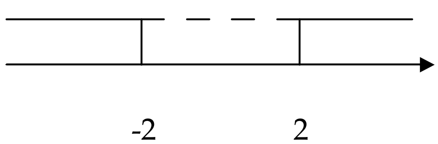
2) $f(x) = x^3 + 3x - 2 \qquad p > 0, q < 0$

Abbiamo una soluzione reale positiva



3) $f(x) = x^3 - 12x + 6$ $\qquad p < 0, q > 0$

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$



$f(M) = f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 6 = -8 + 24 + 6 = 22 > 0$

$M(-2{,}22)$

$f(m) = f(2) = 8 - 24 + 6 = -10 < 0$

$m(2,-10)$

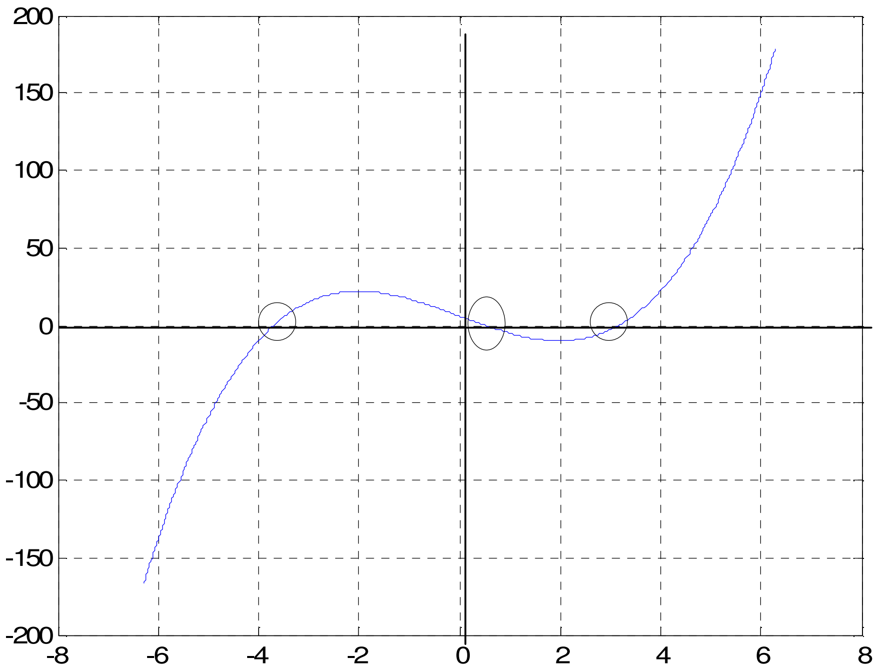
$F(0{,}6)$

Si hanno quindi tre soluzioni distinte.

Applicando la formula di Dal Ferro-Tartaglia-Cardano:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{12}{2}+\sqrt{\frac{144}{4}+\frac{6^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{12}{2}-\sqrt{\frac{144}{4}+\frac{6^3}{27}}} =$$
$$= \sqrt[3]{-6+\sqrt{36+8}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{36+8}}$$

Cioè: $x = y+\frac{12}{3} = y+4 = 4+\sqrt[3]{6+\sqrt{44}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{44}}$

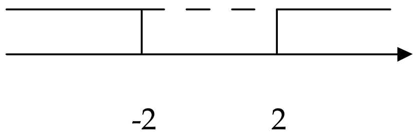


4) $f(x) = x^3 - 12x + 18$ $\quad p<0, q>0$ $\quad$ Ma $q > -p\sqrt{-p}$

$p = -4$
$q = 9$

$9 > 4\sqrt{4} = 8 \Rightarrow q > 8$

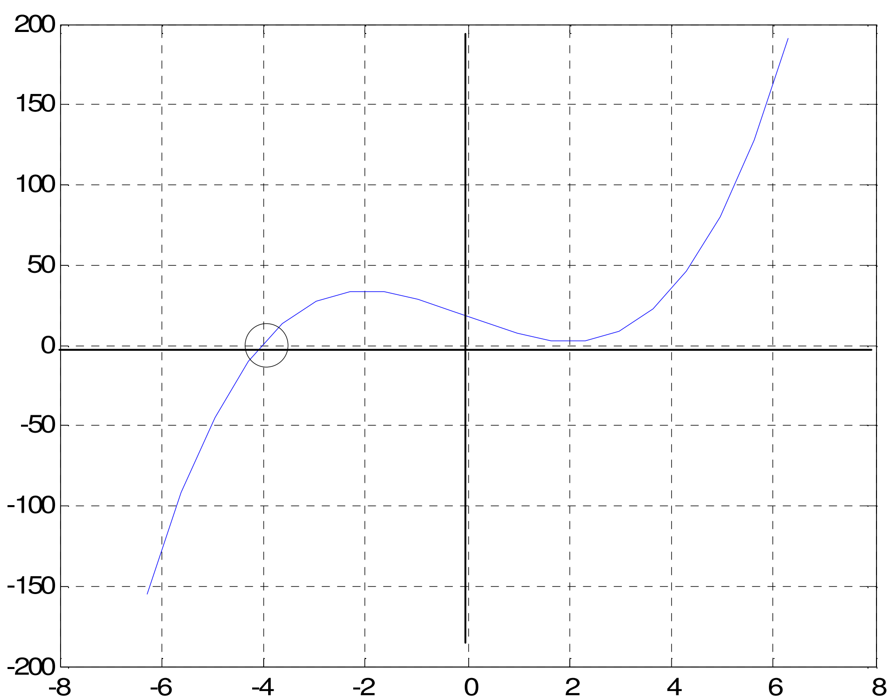
$f'(x) = 3x^2 - 12 = \Leftrightarrow 3(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$
$f''(x) = 6x = 0$
$F(0,18)$



$$f(m) = 8 - 24 + 18 = 2$$
$$f(M) = -8 + 24 + 18 = 34$$

Applicando le formule di Del Ferro-Tartaglia-Cardano, si ha:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{81}{4}+\frac{64}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{81}{4}+\frac{64}{27}}}\ .$$



Capitolo 2 - Risoluzione di equazioni di quarto grado

2.1 Equazioni di quarto grado prima della scoperta della formula risolutiva

I primi esempi di equazioni di quarto grado si trovano in opere arabe datate attorno all'anno 1000. Un problema di Abu'l-Wefa riportato da Abu'l-Faradsh nel *Fihrist* (987 c.) è il seguente: "Trovare la radice di un cubo e di una quarta potenza e di espressioni composte di queste due potenze", cioè risolvere l'equazione $x^4 + px^3 = q$. È andata perduta l'opera contenente la risoluzione del problema posto, ma notiamo che esso può essere risolto intersecando l'iperbole $y^2 + axy + +b = 0$ con la parabola $x^2 - y = 0$. Omar Khayyam, nella sua *Algebra*, risolve anche equazioni di quarto grado col metodo geometrico già precedentemente esposto per le equazioni di terzo grado. Ad esempio, la considerazione del problema di costruire un trapezio isoscele ABCD tale che AB=AD=BC=10 e di area uguale a 90, porta l'autore all'equazione $(100 - x^2)(100 - x)^2 = 8100$. Omar Khayyam osserva che una radice di quest'ultima coincide con una delle intersezioni dell'iperbole $(100 - x)y = 90$ con il cerchio $x^2 + y^2 = 100$.
La seguente equazione $x^4 - 2(x^2 + 200x) = 9999$ si trova nell'opera di astronomia dell'indiano Bhaskara (1150 c.) il quale ne trova una radice nel modo seguente. Innanzitutto egli aggiunge ai due membri l'espressione $4x^2 + 1$, ottenendo: $x^4 - 2x^2 - 400x + 4x^2 + 1 = 4x^2 + 10000$, da cui
$x^4 + 2x^2 + 1 = 4x^2 + 400x + 10000 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = (2x + 100)^2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x + 100 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 99 = 0$
di cui Bhaskara considera la sola soluzione x=11.

Più tardi, nella *Summa* di Luca Pacioli, troviamo un problema esposto da P. Cossali nel modo seguente: "Supposto che il circuito del terrestre equatore sia di miglia 20400 e che da un punto di esso partono due viaggiatori, o due mobili, per farne il giro, andando uno dall'occidente all'oriente con viaggio ogni giorno maggiore in progressione aritmetica, sì che il viaggio del primo giorno sia un miglio soltanto, il viaggio del secondo giorno di due miglia, il viaggio del terzo giorno di tre miglia e così via; andando l'altro per l'opposto da oriente in occidente con viaggi diurni successivamente crescenti, siccome i cubi de' numeri, cioè con viaggio del primo giorno di un miglio, il secondo di otto miglia, il terzo di ventisette, il quarto di sessantaquattro…, si cerca dopo quanti giorni si incontreranno". Tale problema porta all'equazione $\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{4}x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{2}{4}x=20400$ riconducibile alla $x^4+2x^3+3x^2+2x=81600$. Il metodo di Luca Pacioli per la risoluzione di questa equazione consiste nel seguente artificio: egli aggiunge 1 ad entrambi i membri, ottenendo così: $(x^2+x+1)^2=81601$, da cui considerando solo la radice aritmetica del secondo membro come era consuetudine del tempo: $x^2+x+1=\sqrt{81601}$ e quindi $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}+\sqrt{81601}}$.

2.2 Risoluzione dell'equazione di quarto grado con il metodo di Ferrari

La storia relativa alla scoperta della formula risolutiva dell'equazione di quarto grado ha inizio nel 1535 con uno dei soliti quesiti di Maestro Zuanne de Tonini da Coi, precisamente nel Quesito XX dell'opera *Quesiti et invenzioni diverse* di Tartaglia: "…fare da 20 tre parti continue proporzionale in tal specie di proporzione, che moltiplicando le due menore l'una fia l'altra faccia 8".

Dette x, y, z le tre quantità cercate sarà dunque:

$$x+y+z=20$$
$$x:y=y:z$$
$$xy=8$$

Dalle quali si ottengono le equazioni:

$$\begin{aligned} x^4+8x^2+64 &= 20x^3 \\ y^4+8y^2+64 &= 160y \end{aligned}.$$

Tartaglia rispose che riteneva possibile la risoluzione del problema, alla cui soluzione si sarebbe dedicato non appena alcune faccende più urgenti glielo avessero permesso. Benché fossero passati tre anni, tale soluzione tardava però ad arrivare, per cui Maestro Zuanne pose la stessa questione ad altri matematici, tra i quali Cardano. Quest'ultimo, temendo di non riuscire a risolvere le questioni a lui proposte nel termine stabilito, ricorse all'aiuto di Tartaglia tramite il libraio Zuannantonio. Tartaglia, resosi conto che si trattava degli stessi quesiti che erano stati posti a suo tempo anche a lui, rassicurò Cardano sul fatto che in realtà neanche Maestro Zuanne era in grado di risolverli. Quest'ultimo però, dopo neppure un anno, riaprì la questione con nuovi ed altrettanto difficili quesiti, affermando di saperli risolvere e la sua sfrontatezza fu tale da riuscire, con le sue menzogne, a togliere a Cardano, nel 1540, il posto di lettore presso l'Università di Milano. La vittoria di Maestro Zuanne fu però di breve durata, in quanto la sfida da lui lanciata a Cardano fu raccolta da Ludovico Ferrari che ne uscì vincitore, risolvendo effettivamente i quesiti relativi ad equazioni di quarto grado con regola valida in generale. I risultati di Ferrari furono esposti, relativamente ai casi numerici proposti da Maestro Zuanne, nell'*Ars Magna*.

Il problema richiedeva la risoluzione di un'equazione algebrica di quarto grado del tipo $x^4+ax^2+bx+c=0$, che nessuno era in grado di risolvere. Ferrari, mediante la sostituzione

$y = x - \frac{q}{4}$, trasforma la più generale equazione di quarto grado $y^4 + py^3 + qy^2 + ry + s = 0$ nell'equazione $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$. Le equazioni del tipo $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ erano ritenute irresolubili, ma Ludovico Ferrari riesce a risolverle con un procedimento che il Lagrange definisce il più ingegnoso di tutti quelli successivamente inventati. L'artificio ideato da Ferrari permette di ridurre il problema alla risoluzione di un'equazione di terzo grado.

Il procedimento per la risoluzione dell'equazione $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$ riportato nell'opera di Cardano è il seguente:

1) Aggiungere ad entrambi i membri dell'equazione la quantità $6x^2$ allo scopo di rendere il membro sinistro un quadrato: $x^4 + 12x^2 + 36 = 60x + 6x^2$;

2) Aggiungere ad entrambi i membri dell'equazione termini comportanti una nuova incognita in modo che il membro di sinistra rimanga un quadrato e tale divenga anche il membro di destra. L'espressione da aggiungere è $2x^2 y + (y^2 + 12y)$, si avrà allora: $(x^2 + y + 6)^2 = 2(y + 3)x^2 + 60x + y^2 + 12y$

che scriveremo: $(x^2 + y + 6)^2 = \frac{4(y+3)^2 x^2 + 120x(y+3) + 2(y+3)(y^2+12y)}{2(y+3)}$.

3) Scegliere y in modo che il trinomio del membro a destra sia un quadrato. Cioè si deve avere: $2(y+3)(y^2 + 12y) = 30^2 = 900$.

4) Eseguiti i calcoli otteniamo $y^3 + 15y^2 + 36y = 450$. Tale equazione viene ovviamente risolta mediante le regole precedentemente date per la risoluzione di equazioni di terzo grado.

5) Si sostituisce allora con i valori ottenuti nel quarto passaggio la y che compare nell'equazione del secondo passaggio e si estrae la radice quadrata di entrambi i membri.

6) Il risultato del quinto passaggio è un'equazione di secondo grado che va risolta per poter trovare il valore richiesto della x.

Il metodo applicato al caso particolare adesso considerato è del tutto generale ed applicabile a qualsiasi equazione della stessa forma.

Osserviamo inoltre che per risolvere equazioni di quarto grado, prive del termine cubico, è tuttavia necessario conoscere la risoluzione dell'equazione completa di terzo grado, problema che fu affrontato e risolto dallo stesso Cardano con l'introduzione di opportune trasformazioni algebriche, con l'ausilio delle quali si può anche trasformare l'equazione completa di quarto grado in quella studiata da Ferrari.

La prima esposizione completa ed esauriente della risoluzione dell'equazione di quarto grado si trova nell'*Algebra* di Bombelli, che è considerato perciò, a volte, erroneamente l'autore della formula risolutiva. A causa delle limitazioni che sorgono dal fatto di non usare numeri negativi come coefficienti, Bombelli tratta ben quarantadue casi distinti.

2.3 Risoluzione dell'equazione di quarto grado con il metodo di Eulero

Un metodo per risolvere l'equazione di quarto grado, che ricalca quello ideato da Tartaglia per l'equazione di terzo grado, è stato proposto da **Eulero**. Il metodo è il seguente.

Data l'equazione $y^4 + py^2 + qy + r = 0$, cerchiamo la soluzione nella forma $y = u + v + w$.

Elevando al quadrato y, si ottiene: $y^2 = (u^2 + v^2 + w^2) + 2(uv + uw + vw)$; trasportando al primo membro il primo termine del secondo membro ed elevando al quadrato, si ottiene:

$y^4 - 2(u^2 + v^2 + w^2)y^2 + (u^2 + v^2 + w^2)^2 = 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) + 8uvw(u + v + w)$, ossia $y^4 - 2(u^2 + v^2 + w^2)y^2 - 8uvwy + (u^2 + v^2 + w^2)^2 - 4(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) = 0$. Questa è un'identità per $y = u + v + w$ e, confrontandola con l'equazione $y^4 + py^2 + qy + r = 0$, si deduce che se (u, v, w) è una soluzione del sistema $\begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = -\dfrac{p}{2} \\ u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 = \dfrac{p^2}{16} - \dfrac{r}{4} \\ uvw = -\dfrac{q}{8} \end{cases}$, la somma $u + v + w$ è una radice dell'equazione di quarto grado di partenza. Elevando al quadrato l'ultima equazione, il sistema diventa: $\begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = -\dfrac{p}{2} \\ u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 = \dfrac{p^2}{16} - \dfrac{r}{4} \\ u^2v^2w^2 = \dfrac{q^2}{64} \end{cases}$. Poiché dei numeri u^2, v^2, w^2 conosciamo la somma, la somma dei prodotti a due a due e il prodotto, per le formule di Viète essi sono le soluzioni dell'equazione di terzo grado $z^3 + \dfrac{p}{2}z^2 + \left(\dfrac{p^2}{16} - \dfrac{r}{4}\right)z - \dfrac{q^2}{64} = 0$ che dicesi **risolvente** dell'equazione di quarto grado $y^4 + py^2 + qy + r = 0$. Ottenute le radici u^2, v^2, w^2 di quest'ultima equazione, mediante estrazioni di radici quadrate si otterranno u, v, w. I segni delle radici quadrate devono essere presi in modo che sia soddisfatta la terza condizione del sistema. Siano allora u_0, v_0, w_0 valori di u, v, w così determinati e perciò soddisfacenti alla condizione: $u_0v_0w_0 = -\dfrac{q}{8}$, allora $u_0 + v_0 + w_0$ è radice dell'equazione $y^4 + py^2 + qy + r = 0$, ed ogni altra radice di questa si otterrà cambiando il segno a due soli dei numeri u_0, v_0, w_0, perché soltanto in questo modo il prodotto uvw rimane uguale a $-q/8$; pertanto le radici dell'equazione $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ sono:

$$\begin{aligned} x_1 &= u_0 + v_0 + w_0 \\ x_2 &= u_0 - v_0 - w_0 \\ x_3 &= -u_0 + v_0 - w_0 \\ x_4 &= -u_0 - v_0 + w_0 \end{aligned}.$$

L'equazione $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ ha radici multiple se e solo se le ha la sua risolvente cubica.

Per discutere l'equazione $y^4 + py^2 + qy + r = 0$, supposti p, q, r reali, $q \neq 0$ e l'equazione priva di radici multiple, basta quindi riferirsi all'equazione $z^3 + \frac{p}{2} z^2 + \left(\frac{p^2}{16} - \frac{r}{4} \right) z - \frac{q^2}{64} = 0$.

Quando la risolvente ha una radice reale e due complesse coniugate, l'equazione di quarto grado ha due radici reali e due complesse coniugate. Quando la risolvente ha tre radici reali positive, l'equazione di quarto grado ha quattro soluzioni reali e distinte; se invece la risolvente ha tre radici reali, una positiva e due negative allora l'equazione di partenza ha quattro radici a due a due complesse coniugate. Infine, nel caso q=0 l'equazione $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ assume la forma $y^4 + py^2 + r = 0$ che prende il nome di **equazione biquadratica** e la cui risoluzione è riconducibile a quella di un'equazione di secondo grado mediante la sostituzione $y^2 = x$.

2.4 Altre formule risolutive algebriche, trigonometriche e grafiche

Anche per le equazioni di quarto grado si può usare un metodo di falsa posizione ponendo $x = \frac{z_1 - z_2 y}{1 - y}$.

Per quanto riguarda la risoluzione trigonometrica, questa si può ottenere confrontando l'equazione di quarto grado con la seguente identità:

$$tg^4\frac{\varphi}{4}+\frac{4}{tg\varphi}tg^3\frac{\varphi}{4}-6tg^2\frac{\varphi}{4}-\frac{4}{tg\varphi}tg\frac{\varphi}{4}+1=0\,.$$

Per le risoluzioni grafiche oltre al metodo di Lill, la ricerca delle radici di un’equazione di quarto grado equivale a quella dei punti base di un fascio di coniche opportuno.

Conclusioni

Dopo Tartaglia e Cardano per quasi due secoli si studiarono le equazioni di 5° grado e di grado superiore, ma tutti i vari tentativi fatti per risolverle in modo analogo a quelle di 2°, 3° e 4° grado non portarono ad alcun risultato.

La risposta definitiva viene data da **Paolo Ruffini** (1765-1822) e da **Niels Henrick Abel** (1802-1829) in uno dei più celebri teoremi della matematica:

Teorema: Per n > 4 non si può fornire, in generale, una forma risolutiva per radicali delle equazioni algebriche.

Paolo Ruffini **Niels H. Abel**

Eulero (1707-1783) aveva tentato di trovare una risolvente di quarto grado per un'equazione generale di quinto grado, ma non trova un'espressione generale: "Il grande numero di espressioni rende questo compito così difficile da concludere con successo, per cui sembra appropriato considerare casi particolari che non conducano a formule così complicate."

Partiamo dall'equazione di quinto grado, nella forma non restrittiva $x^5 + 5cx + d = 0$. **Gian Francesco Malfatti** (1731-1807) estende il lavoro incompleto di Eulero e produce la risolvente $(z-c)^4(z^2 - 6cz + 25c^2) = d^4 z$.

Teorema: Un'equazione di quinto grado è risolubile per radicali esattamente quando la risolvente di Malfatti ha una radice razionale.

Infine, **Evariste Galois** (1811-1832) porta avanti delle ricerche mirate a determinare in

Evariste Galois

quali casi equazioni polinomie fossero risolvibili mediante radicali e riesce, prendendo spunto dai risultati ottenuti dai matematici che lo avevano preceduto, a unificare tutti i vari metodi. Egli afferma che:

<u>Teorema</u>: Condizione necessaria e sufficiente affinché un'equazione irriducibile avente per grado un numero primo sia risolubile per radicali è che tutte le sue radici siano funzioni razionali di due qualsiasi di esse.

Bibliografia

[1] R. Franci – L. T. Rigatelli, *Storia della teoria delle equazioni algebriche*, Mursia

[2] Silvio Maracchia, *Storia dell'algebra*, Liguori Editore

[3] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Mondadori

[4] http://www.science.unitn.it/~caranti/Papers/Malfatti.pdf

[5] http://users.dimi.uniud.it/~gianluca.gorni/Dispense/TerzoGrado.pdf

[6] http://scienze-como.uninsubria.it/bressanini/divulgazione/rima.pdf