Università degli Studi di Cagliari

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

Musica e matematica: l'algoritmo Chas

Relatore

Dott. Lucio Cadeddu

Tesi di Laurea di

Sonia Cannas

Anno Accademico 2010-2011

Indice

Introduzione

Nonostante appartengano a due ambiti considerati diametralmente opposti, musica e matematica presentano numerosi legami, e sono sempre più numerosi gli studi rivolti verso una descrizione matematica della musica. In questo lavoro è stata analizzata, da un punto di vista matematico e fisico, la struttura della scala musicale e dei suoi suoni, in particolar modo l'ordinamento dei suoni secondo l'*algoritmo chas*.
Il lavoro è stato suddiviso in 3 capitoli.

Il primo capitolo contiene tutte le informazioni musicali, fisiche e matematiche necessarie per la comprensione dello studio svolto. In esso, infatti, si trovano i concetti fondamentali della morfologia musicale: *intervalli* e *scale*, e la rappresentazione di queste ultime attraverso il circolo delle quinte. In seguito è stato analizzato il suono e la sua produzione (specialmente da parte di una corda), l'equazione dell'onda sonora e l'importante fenomeno dei *battimenti* sul quale si basa il sistema chas. Il comportamento di un'onda viene analizzato nell'*analisi di Fourier*, che si occupa della scomposizione di una funzione periodica f in una serie di Fourier, cioè in una somma di funzioni periodiche semplici dette *armoniche*, le cui frequenze sono multiple di quelle della f. Esse permettono di determinare il *timbro*, una delle tre qualità del suono, e sono caratterizzanti dei suoni complessi, come ad esempio quelli prodotti dalla vibrazione una corda. La vibrazione di più corde determina una vibrazione totale che può portare ad un suono *consonante* o *dissonante*, e vengono presentate due teorie di consonanza: una di Galielo e una di Helmohltz. Infine vengono descritti i tre caratteri fisici del suono: altezza, timbro ed intensità.

Nel secondo capitolo sono stati analizzati due diversi procedimenti di divisione dell'ottava. Il primo ha dato origine alla scala pitagorica, che, partendo dai primi quattro numeri e dall'osservazione dei suoni prodotti dividendo la corda di un monocordo, determina i rapporti degli intervalli consonanti di ottava, quinta e quarta. A partire da essi si descrive la costruzione della scala diatonica e di quella cromatica attraverso un procedimento per quinte ascendenti e discendenti. In entrambe le scale però alcuni intervalli che dovrebbero essere consonanti risultano essere dissonanti e inoltre viene dimostrato che il circolo delle quinte non si chiude. Il secondo procedimento per dividere l'ottava è quello della scala tolemaico-zarliniana, detta anche scala naturale poiché si é osservato che i suoni attingono dalla serie degli armonici. Essa é stata costruita a partire da quella pitagorica, modificando alcuni intervalli tramite la suddivisione del monocordo in più di quattro parti. In questa scala migliorano le consonanze di alcuni intervalli ma ne peggiorano altre e ciò comporta un problema nel cambiamento di tonalità.

Nel terzo capitolo viene analizzato il *sistema temperato equabile*, che risolve il problema del cambiamento di tonalità dividendo l'ottava in dodici parti uguali, e vengono messe a confronto le tre scale descritte. Nello stesso capitolo viene mostrato un nuovo approccio al temperamento della scala, il *sistema formale circolare armonico* (C.Ha.S), ideato dall'accordatore Alfredo Capurso per migliorare l'accordatura dei pianoforti. Il sistema parte dall'idea base, nata con la scoperta dell'inarmonicità della corda, secondo cui si debba ampliare l'intervallo di ottava e considerare un modulo di due ottave nella costruzione del sistema. Da ciò viene formulato l'*algoritmo chas*.

Nell'appendice, infine, viene mostrato come le frequenze sono disposte secondo una scala logaritmica.

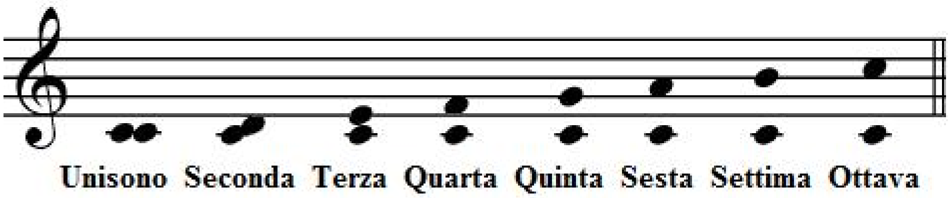
Capitolo 1

Suoni e note

1.1 Scale e intervalli

Si definisce intervallo la differenza d'altezza fra due suoni, esprimibile in fisica acustica con il rapporto delle frequenze dei suoni stessi. Teoricamente gli intervalli sono in numero illimitato, poichè infiniti sono i suoni possibili in natura, ma nella pratica di qualsiasi sistema musicale essi si riducono ad un numero limitato.

Il nome di un intervallo si determina contando le linee e gli spazi che separano le due note sul rigo musicale.



La scala è una successione graduale di un dato numero di suoni che dividono in altrettante parti l'intervallo di ottava.
Le note di una scala sono definite anche *gradi* della scala, e il I grado[1] viene chiamato *tonica*.
Quasi tutta la musica, compresa quella delle culture non occidentali, è tonale, cioè è organizzata attorno alla tonica.

Ogni sistema musicale ha la sua scala, definita sia dalla diversa distribuzione degli intervalli fra i gradi che la costituiscono che per ampiezza dei medesimi. I procedimenti per dividere l'ottava in un dato numero di parti sono stati principalmente tre, da essi hanno avuto orgine le scale: pitagorica (vedi par. 2.1), zarliniana (vedi par. 2.2) e temperata (vedi par. 3.1).

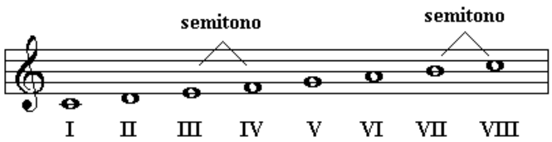
La scala si distingue anzitutto in *cromatica* e *diatonica*.

[1] I gradi della scala vengono indicati con i numeri romani.

- La *scala cromatica* è la scala che comprende tutti i suoni possibili di un sistema; in quello moderno, basato sul temperamento equabile, è definita dalla successione di 12 semitoni contigui.

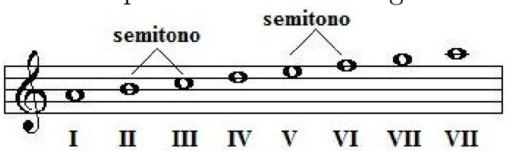
- La *scala diatonica* è una scala di 7 note che suddividono l'ottava in 5 toni e 2 semitoni. La musica tonale è basata su tale scala. Alla scala diatonica appartengono due grandi tipi di scale:

  1. la *scala maggiore*, costituita da 5 toni e 2 semitoni, questi ultimi disposti l'uno tra il III e il IV grado e l'altro tra il VII e l'VIII;

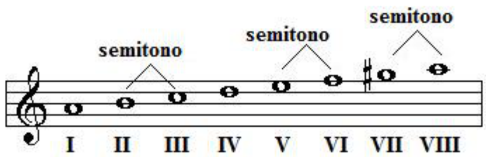


  2. la *scala minore* che si presenta in tre diverse forme:

     a) la *scala minore naturale*, costituita anch'essa da 5 toni e 2 semitoni, questi ultimi disposti tra il II e il III grado e tra il V e il VI;



     b) la *scala minore armonica*, costituita da 3 toni, 3 semitoni (tra il II e il III grado, tra il V e il VI e tra il VII e l'VII) e un tono e mezzo (tra il VI e il VII grado);

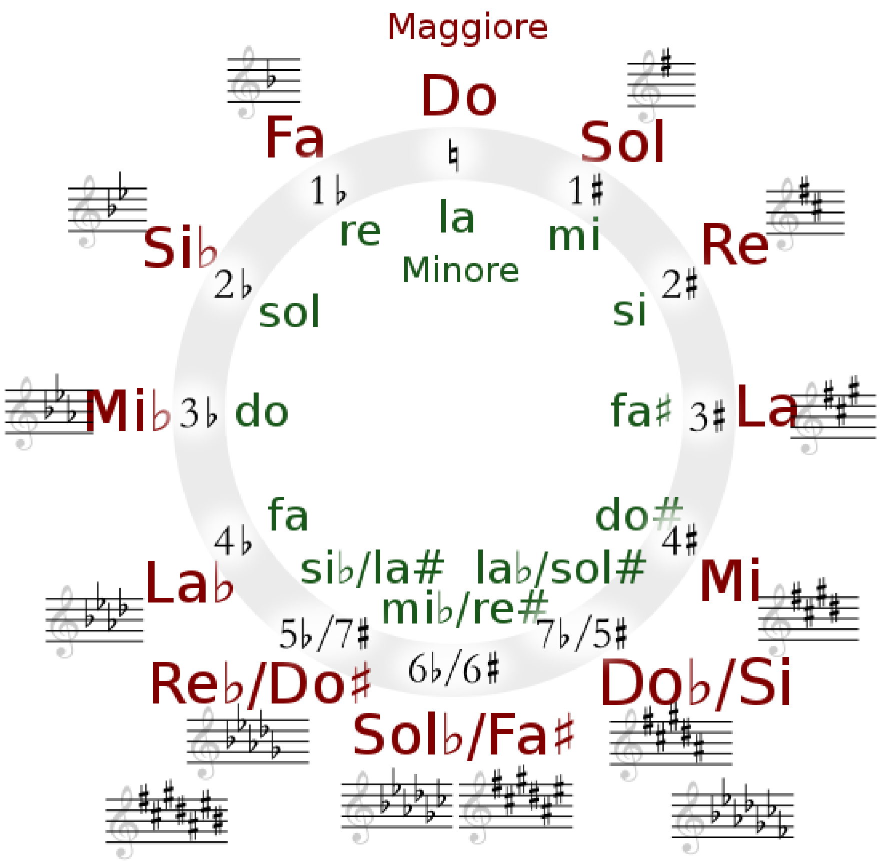


     c) la *scala minore melodica*, costituita da 5 toni e 2 semitoni sia nel moto ascendente che in quello discendente, ma mentre nel moto ascendente i semitoni si trovano l'uno tra il II e il III grado (come nel moto discendente) e l'altro tra il VII e l'VIII, in quello discendente quest'ultimo semitono si sposta fra VI e V grado.

Tutte le scale maggiori o minori presentano la stessa successione di toni e semitoni, indipendentemente dalla tonica scelta.

Ad ogni scala maggiore viene associata una scala *relativa* minore, la cui tonica si trova una terza sotto quella della scala maggiore.

Tutte le possibili scale maggiori, con le relative minori, formate su ognuno dei dodici suoni della scala cromatica, possono essere disposte nel *circolo delle quinte*.



Tale disposizione prevede le armature di chiave caratterizzanti le scale collocate in modo da formare un cerchio, secondo una progressione crescente di diesis o decrescente di bemolli. Il circolo delle quinte viene definito in tale modo poiché percorrendo il cerchio in senso orario la tonica di ciascuna scala si trova a distanza di quinta da quella della scala precedente.

Un intervallo è definito da due elementi: il primo indica la distanza fra i due suoni (seconda, terza, quarta, ecc. . .), il secondo indica la sua specifica funzione tonale nel contesto musicale (quale tipo di terza, quarta, ecc. . .), e può essere determinata mediante un confronto con la scala maggiore formata a partire dalla nota più grave delle due note. Se la nota superiore coincide con una nota della scala, l'intervallo è *maggiore* (se si tratta di seconde, terze, seste o settime) o *giusto* (se si tratta di ottave, quinte, quarte o unisoni).

Se la nota superiore non coincide con una nota della scala, si devono applicare i seguenti criteri:

a) la differenza tra un intervallo maggiore e uno *minore* con lo stesso nome generico è di un semitono;

b) ampliando di un semitono un intervallo maggiore o giusto diventa *aumentato*, ampliandolo di due semitoni diventa *più che aumentato*;

c) riducendo di un semitono un intervallo minore o giusto, questo diventa *diminuito*, riducendolo di due semitoni diventa *più che diminuito*.

Osservazione 1. *Gli intervalli di terza minore e di seconda aumentata, per esempio, nel sistema temperato (vedi paragrafo 3.1) hanno rapporti di frequenza identici, quindi suonati al pianoforte risultano uguali, ciò che è differente è il loro senso armonico nel contesto musicale. In questo caso si dice che i due intervalli sono* enarmonici.

Gli intervalli si classificano ancora in:

- *consonanti* (ottava, quinta e quarta giuste, terza e sesta maggiori e minori) i quali danno all'ascoltatore una sensazione di completezza e riposo, o *dissonanti* (tutti gli altri) che danno invece un senso di tensione e contrasto, e tendono a risolversi su un intervallo consonante;

- *diatonici*, se le loro note fanno parte di una stessa scala diatonica, o *cromatici* in caso contrario;

- *armonici* se i suoni sono emessi in contemporanea, *melodici* se si susseguono nel tempo;

- *semplici*, se compresi nell'ambito di un'ottava, *composti* se la superano (ma sono riconducibili a dei semplici corrispondenti, in quanto definiti dalle stesse note, per cui, ad esempio, una nona corrisponde ad una seconda).

1.2 Il suono

Il mezzo che permette la trasmissione della musica è il suono. Con tale termine si indica un fenomeno fisico-acustico che consiste in delle vibrazioni di un corpo elastico trasmesse nell'ambiente circostante (generalmente l'aria). Può essere anche inteso come sensazione acustica prodotta dalla sollecitazione dell'apparato uditivo. Noi esseri umani siamo in gradi di percepire suoni la cui frequenza va dai 15 ai 20000 Hz.

Il termine *vibrazione* indica un qualsiasi spostamento di un corpo attorno alla sua posizione d'equilibrio. Lo studio delle vibrazioni è connesso alla teoria delle onde, il suono è infatti un'onda le cui vibrazioni avvengono lungo la direzione di propagazione, perciò l'onda sonora è un'*onda logitudinale*. Le vibrazioni provengono da una *sorgente* sonora che produce l'onda, esempi di sorgenti sonore sono:

- gli strumenti musicali;
- l'apparato vocale con le sue corde vocali che vengono fatte vibrare dall'aria che esce dai polmoni e danno origine alla voce;
- qualunque fenomeno che provochi uno spostamento d'aria avente caratteristiche fisiche opportune.

Il meccanismo di produzione dei suoni musicali varia a seconda della categoria dello strumento:

- Cordofoni, in cui la parte vibrante può essere una corda percossa (come nel pianoforte), strofinata (come negli archi) o pizzicata (come nella chitarra). Indichiamo con l la lunghezza della corda, S la sua sezione, ρ_0 la sua densità e T la tensione a cui è sottoposta. La frequenza ν delle sue vibrazioni gode delle seguenti proprietà:

  1. $$\nu \propto \frac{1}{l}$$

     il numero di vibrazioni è inversamente proporzionale alla lunghezza della corda;

  2. $$\nu \propto \frac{1}{S}$$

     il numero di vibrazioni è inversamente proporzionale alla sezione della corda;

  3. $$\nu \propto \sqrt{T}$$

     il numero delle vibrazioni è direttamente proporzionale alla radice quadrata della tensione;

  4. $$\nu \propto \frac{1}{\sqrt{\rho_0}}$$

     il numero delle vibrazioni è inversamente proporzionale alla radice quadrata della densità della corda.

  Quindi la frequenza del suono emesso da una corda tesa posta in vibrazione:

  $$\nu = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\rho_0 S}} \tag{1.1}$$

- Aerofoni, in cui la vibrazione si ottiene dalla colonna d'aria della canna, e negli strumenti a fiato ciò avviene mediante il meccanismo d'imboccatura che può essere ad *ancia* o a *bocca*.
- Membranofoni, in cui la parte vibrante è una membrana flessibile che può essere percossa (come nelle percussioni).
- Idiofoni: in cui il corpo vibrante è un solido capace di vibrare.

Le vibrazioni delle corde sono trasversali, cioè il loro moto si compie perpendicolarmente alla lunghezza della corda, contrariamente a quelle della colonna d'aria dei tubi sonori che sono invece longitudinali, cioè si sviluppano nel senso della lunghezza del tubo.

1.3 Equazione dell'onda sonora

In generale un'onda è una perturbazione che nasce da una sorgente e si propaga nello spazio, trasportando energia o quantità di moto da un punto ad un altro. L'equazione generica di un'onda è detta *equazione di d'Alembert* e può essere espressa in funzione della posizione e del tempo come:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \tag{1.2}$$

dove v è la velocità di propagazione dell'onda, per le onde sonore $v = 330$ m/s nell'aria. Essa descrive i diversi generi di onde.

La φ(x,t) esprime l'equazione dell'onda in funzione della posizione x e del tempo t. Quindi l'equazione di d'Alembert diventa:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \tag{1.3}$$

La soluzione generale dell'equazione di d'Alembert in una dimensione è del tipo:

$$\varphi(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt) \tag{1.4}$$

dove f è la *componente progressiva* dell'onda mentre g è la *componente regressiva*. Verifichiamo che la (1.4) sia soluzione della (1.3):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = f'(x - vt) + g'(x + vt)$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = f''(x - vt) + g''(x + vt)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -vf'(x - vt) + vg'(x + vt)$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = v^2 f''(x - vt) + v^2 g''(x + vt)$$

Quindi sostituendo nella (1.3):

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\\=&f''(x-vt)+g''(x+vt)-\frac{1}{v^2}[v^2f''(x-vt)+v^2g''(x+vt)]=0\end{aligned}$$

Quindi $f(x,t)=f(x-vt)$ rappresenta un'onda che si propaga lungo la direzione e verso dell'asse x. Se f è periodica nel suo argomento allora descrive un'onda periodica, descritta da una funzione sinusoidale. In tal caso essa prende il nome di *onda progressiva armonica*, e può essere descritta come:

$$f(x,t)=f(x-vt)=A\sin[k(x-vt)+\phi_0] \tag{1.5}$$

dove:

- A è detta *ampiezza* dell'onda;

- k = $\frac{2\pi}{\lambda}$ è il modulo del *vettore d'onda*, orientato come l'asse x;

- $k(x-vt)+\phi_0=\phi(x,t)$ è la *fase dell'onda* e $\phi_0=\phi(0,0)$ è la fase iniziale.

Le altre grandezze che permettono di descrivere un'onda sono:

- T, il *periodo* dell'onda;

- $\nu=\frac{1}{T}$, la *frequenza* dell'onda;

- $\lambda=vT$, la *lunghezza* dell'onda.

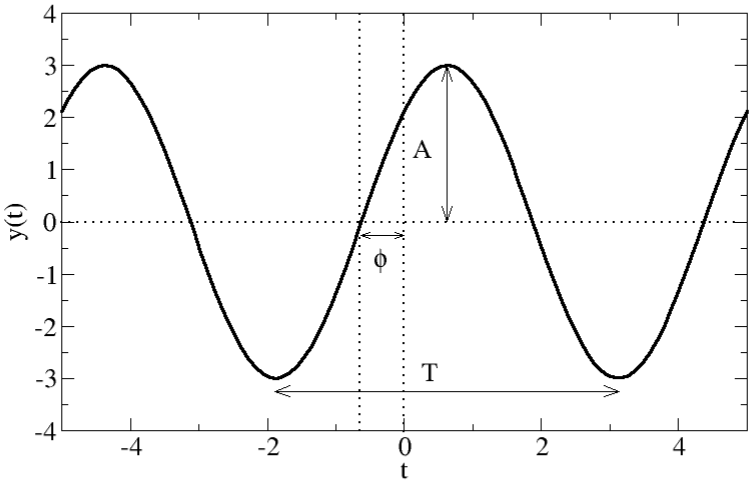
Osserviamo che:

$$\phi(x,t)=k(x-vt)+\phi_0=kx-kvt+\phi_0=kx-\frac{2\pi}{\lambda}vt=kx-\omega t+\phi_0 \tag{1.6}$$

dove $\omega=\frac{2\pi}{T}$ è la *frequenza angolare*, perciò:

$$f(x,t)=f(x-vt)=A\sin[kx-\omega t+\phi_0] \tag{1.7}$$

Un'onda sonora armonica, quindi, può essere espressa dalla (1.7)



Oltre ad onde sonore con oscillazioni periodiche descritte da una funzione sinusoidale, esistono onde con oscillazioni più complesse in due sensi:

1. Pur essendo periodiche, possono avere una forma non sinusoidale. In particolare possono essere costituite dalla sovrapposizione di più onde sinusoidali di frequenza opportuna.

2. Possono essere non periodiche. In realtà tutte le onde in natura lo sono in un certo senso, tuttavia, normalmente si considera periodica un'onda la cui durata nel tempo è molto maggiore del suo periodo.

1.4 I battimenti

Il fenomeno dei battimenti consiste in variazioni d'intensità sonora e si verifica quando due onde aventi frequenze lievemente diverse si sovrappongono. Tale condizione si verifica, per esempio, quando due tasti adiacenti di un pianoforte vengono battuti simultaneamente.

Consideriamo un punto dello spazio per cui passano le due onde. Per semplicità supponiamo che le due onde abbiano uguale ampiezza A, sebbene ciò non sia necessario. La vibrazione risultante nel punto considerato è data dalla somma delle due vibrazioni, ma l'ampiezza della vibrazione risultante non è costante, varia nel tempo. Tale variazione provoca variazioni d'intensità sonora, quindi battimenti.

Indichiamo con y_1 e y_2 le vibrazioni prodotte dalle due onde in un certo punto:

$$y_1 = A\sin(\omega_1 t) = A\sin(2\pi\nu_1 t)$$
$$y_2 = A\sin(\omega_2 t) = A\sin(2\pi\nu_2 t)$$

Per il principio di sovrapposizione, la vibrazione risultante è:

$$y = y_1 + y_2 = A[\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)] \tag{1.8}$$

ricordando la formula di postaferesi:

$$
\begin{aligned}
& \sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \\
\Rightarrow \quad & y = 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) = \\
& = 2A\cos\left(\frac{2\pi\nu_1-2\pi\nu_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{2\pi\nu_1+2\pi\nu_2}{2}t\right) = \\
& = \left[2A\cos\left(\frac{\nu_1-\nu_2}{2}2\pi t\right)\right]\sin\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}2\pi t\right)
\end{aligned} \tag{1.9}
$$

Siccome $\nu_1 \sim \nu_2$:

$$\cos\left(\frac{\nu_1-\nu_2}{2}2\pi t\right) \simeq \pm 1 \tag{1.10}$$

L'onda risultante possiede una forma caratteristica che mostra una sorta di "doppia oscillazione". Infatti essa ha un'oscillazione rapida di frequenza:

$$\bar{\nu} = \frac{\nu_1+\nu_2}{2} \tag{1.11}$$

che è la media delle frequenze delle due onde, ed un'oscillazione che modula l'ampiezza data dall'espressione fra parentesi quadre della (1.9) come mostrato dalla (1.10). Quindi l'ampiezza varia nel tempo con frequenza:

$$\nu_0 = \frac{\nu_1-\nu_2}{2} \tag{1.12}$$

Un battimento, cioè un massimo d'ampiezza, si verifica quando la (1.10) diventa un'uguaglianza.

Com'è noto, questo effetto viene utilizzato per accordare gli strumenti musicali.

1.5 Analisi di Fourier

Il comportamento di un'onda può essere analizzato separandola nelle sue componenti. L'operazione di scomporre una funzione periodica f in somma (finita o infinita) di funzioni periodiche semplici costituisce l'*analisi armonica* (o *analisi di Fourier*) della funzione f. L'indagine dell'analisi armonica parte dalla serie di Fourier.

Una serie di Fourier è una serie del tipo:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{\text{n}}\cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_{\text{n}}\sin(nx) \tag{1.13}$$

dove $a_{\text{n}}, b_{\text{n}} \in \mathbb{R}$ o anche $a_{\text{n}}, b_{\text{n}} \in \mathbb{C}$, mentre la variabile $x \in \mathbb{R}$.

Tale serie di Fourier gode di diverse proprietà.

1. *Periodicità.* Le funzioni $\cos(nx)$ e $\sin(nx)$ sono periodiche, il minimo periodo comune a tutte è 2π, perciò se la serie converge in un punto $\bar{x}$ convergerà, con la stessa somma, in $\bar{x} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, perciò la somma di una serie di Fourier di questo tipo è periodica di periodo 2π.

2. *Condizione sufficiente per la convergenza.* Condizione sufficiente di convergenza è che le serie numeriche $\sum_{n=1}^{\infty} |a_\mathrm{n}|$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |b_\mathrm{n}|$ siano convergenti. Essendo:

$$|a_\mathrm{n} \cos(nx) + b_\mathrm{n} \sin(nx)| \leq |a_\mathrm{n} \cos(nx)| + |b_\mathrm{n} \sin(nx)| \leq |a_\mathrm{n}| + |b_\mathrm{n}|$$

la serie di Fourier risulta assolutamente e uniformemente convergente $\forall x \in \mathbb{R}$, e la sua somma $f(x)$ è una funzione continua.

3. *Relazione tra i coefficienti a_n, b_n e la somma della serie.* Supponiamo che $f(x)$ sia somma di una serie di Fourier uniformemente convergente in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_\mathrm{n} \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_\mathrm{n} \cos(nx) \tag{1.14}$$

Moltiplichiamo ambo i membri della (1.14) per $\cos(mx)$, con $m \in \mathbb{N}$, e integriamo da $-\pi$ a π:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} & f(x)\cos(mx)dx = \\ &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\cdot\sum_{n=1}^{\infty} a_\mathrm{n}\cos(nx)dx + \\ &\qquad + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\cdot\sum_{n=1}^{\infty} b_\mathrm{n}\cos(nx)dx\end{aligned} \tag{1.15}$$

Ma siccome:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)dx = \frac{1}{m}[\sin(mx)]_0^1 = 0 \tag{1.16}$$

allora

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)dx = \begin{cases} 0 & \text{se m} \neq \text{n} \\ \pi & \text{se m} = \text{n} \end{cases} \tag{1.17}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cdot\sin(nx)dx = 0 \tag{1.18}$$

Quindi:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx = \pi a_{\mathrm{m}}$$

$$\Rightarrow \quad a_{\mathrm{m}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx \tag{1.19}$$

In modo analogo, moltiplicando ambo i membri della (1.14) per $\sin(mx)$ e integrando da $-\pi$ a π otteniamo:

$$b_{\mathrm{m}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)dx \tag{1.20}$$

4. *Periodi diversi da* 2π. Potremmo considerare la serie di Fourier costruita con funzioni del tipo:

$$\cos\Big(\frac{2\pi n}{\tau}y\Big), \quad \sin\Big(\frac{2\pi n}{\tau}y\Big) \qquad \text{con } \tau \neq 0 \tag{1.21}$$

Esse sono funzioni di periodo τ, e l'eventuale somma (potrebbero non convergere) di tali serie sarebbe anch'essa di periodo τ, quindi le formule (1.14), (1.19) e (1.20) sarebbero sostituite dalle seguenti:

$$g(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{\mathrm{n}}\cos\Big(\frac{2\pi n}{\tau}y\Big) + \sum_{n=1}^{\infty} b_{\mathrm{n}}\sin\Big(\frac{2\pi n}{\tau}y\Big) \tag{1.22}$$

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{2}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} g(y)\cos\Big(\frac{2\pi n}{\tau}y\Big)dy \tag{1.23}$$

$$b_{\mathrm{n}} = \frac{2}{\tau}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} g(y)\sin\Big(\frac{2\pi n}{\tau}y\Big)dy \tag{1.24}$$

Definizione 1 (Coefficienti di Fourier)**.** - *Data una qualsiasi funzione τ-periodica g, se gli integrali* (1.19) *e* (1.20) *esistono, anche in senso generalizzato, i numeri a_n e b_n vengono detti coefficienti di Fourier della funzione g.*

Se, per una funzione g, possiamo calcolare i coefficienti $\mathrm{a_n}$ e $\mathrm{b_n}$, possiamo anche scrivere la corrispondente serie di Fourier: diremo che essa è la serie *associata* alla funzione g e scriveremo:

$$g(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{\mathrm{n}}\cos\Big(\frac{2\pi n}{\tau}y\Big) + \sum_{n=1}^{\infty} b_{\mathrm{n}}\sin\Big(\frac{2\pi n}{\tau}y\Big) \tag{1.25}$$

Osservazione 2. - *Il fatto che, per una funzione g, possiamo calcolare i coefficienti a_n e b_n, e dunque possiamo scrivere la serie di Fourier associata, non implica che detta serie sia convergente, né che, se convergente, la sua somma coincida con la funzione g.*

Teorema 1 (Calcolo dei coefficienti: funzioni pari e dispari). - *Se $f(x)$ è una funzione τ-periodica, $\forall a \in \mathbb{R}$ risulta:*

$$\int_a^{a+\tau} f(x)dx = \int_0^{\tau} f(x)dx \tag{1.26}$$

Dimostrazione.

$$\int_a^{a+\tau} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^{\tau} f(x)dx + \int_{\tau}^{a+\tau} f(x)dx$$

sostituendo nell'ultimo integrale: $x = t + \tau$

$$\int_{\tau}^{a+\tau} f(x)dx = \int_0^a f(t+\tau)dt = \int_0^a f(t)dt$$

esso cancella il primo integrale a secondo membro, quindi si ha la tesi. □

Osservazione 3. *Se g è una funzione pari i coefficienti b_{n} dati dalla* (1.24) *sono tutti nulli; mentre se g è dispari sono tutti nulli i coefficienti a_{n}. Quindi la serie di Fourier associata ad una funzione pari è una serie di soli coseni, quella associata a una funzione dispari è una serie di soli seni.*

Nel campo complesso le serie di Fourier sono del tipo:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_{\mathrm{n}} e^{inx} \tag{1.27}$$

Si tratta di una forma compatta per scrivere la (1.13). Si può passare da una forma all'altra ponendo:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{a_0}{2} & a_0 &= 2\gamma_0 \\ \gamma_{\mathrm{n}} &= \frac{1}{2}(a_{\mathrm{n}} - ib_{\mathrm{n}}) & a_{\mathrm{n}} &= \gamma_{\mathrm{n}} + \gamma_{-\mathrm{n}} \\ \gamma_{-\mathrm{n}} &= \frac{1}{2}(a_{\mathrm{n}} + ib_{\mathrm{n}}) & b_{\mathrm{n}} &= \gamma_{\mathrm{n}} - \gamma_{-\mathrm{n}} \end{aligned}$$

Se $\sum_{n=\infty}^{+\infty} |\gamma_{\mathrm{n}}|$ converge, allora la serie data converge assolutamente e uniformemente. Detta $f(x)$ la sua somma, si ha:

$$\gamma_{\mathrm{n}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)dx \tag{1.28}$$

1.6 Le armoniche

Quando si colpisce un diapason questo comincia a vibrare, e le sue vibrazioni possono essere descritte da una funzione periodica semplice come:

$$x(t) = a\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right) \qquad \textit{oppure} \qquad x(t) = a\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right) \tag{1.29}$$

dove il numero positivo a misura l'ampiezza dell'oscillazione, e $\frac{1}{\tau}$ la frequenza tipica del diapason.

Nel paragrafo 1.5 abbiamo visto che ad una funzione periodica dotata dei coefficienti di Fourier (1.23) e (1.24) corrisponde una serie di Fourier associata. Il termine:

$$a_1 \cos x + b_1 \sin x \tag{1.30}$$

è detto *armonica fondamentale*, mentre il termine:

$$a_{\mathrm{n}} \cos(nx) + b_{\mathrm{n}} \sin(nx) \tag{1.31}$$

è detto *armonica n-esima.*

Il diapason ha la proprietà di emettere suoni *puri*, cioè suoni di una determinata frequenza. In genere nella pratica musicale si riscontrano vibrazioni sinusoidali, cioè suoni puri, solo nei suoni di origine elettrica ed elettronica. In tutti gi altri casi (strumenti musicali e voci umane) le vibrazioni sono più o meno complesse, e ad esse corrispondono suoni più o meno complessi risultanti dalla sovrapposizione delle diverse armoniche. Quindi in un suono complesso assieme al suono fondamentale si sviluppano i *suoni armonici*, suoni secondari la cui sonorità è quasi impercettibile, che si fondono col suono principale.

Se, ad esempio, eccitiamo una corda fissata agli estremi, essa può oscillare in diversi modi, cioè vibra con diverse frequenze: tali frequenze, dette *secondarie*, sono multiple di una *frequenza fondamentale* ν_0 propria della corda, ma di ampiezza (volume sonoro) sempre minore, pertanto impercettibili all'orecchio umano da un certo punto in poi. Le frequenze secondarie sono quindi legate a quella fondamentale dalla relazione:

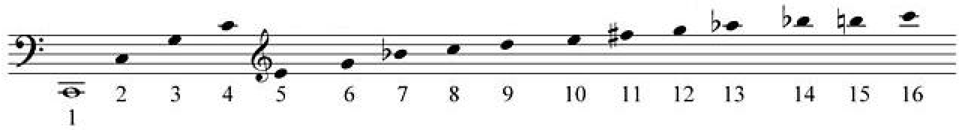
$$\nu_{\mathrm{n}} = n\nu_0, \qquad n \in \mathbb{N}^+$$

e sono prodotte eccitando $\frac{1}{n}$ di corda. Per tale motivo, la successione dei reciproci dei numeri naturali

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

viene detta *successione armonica.*

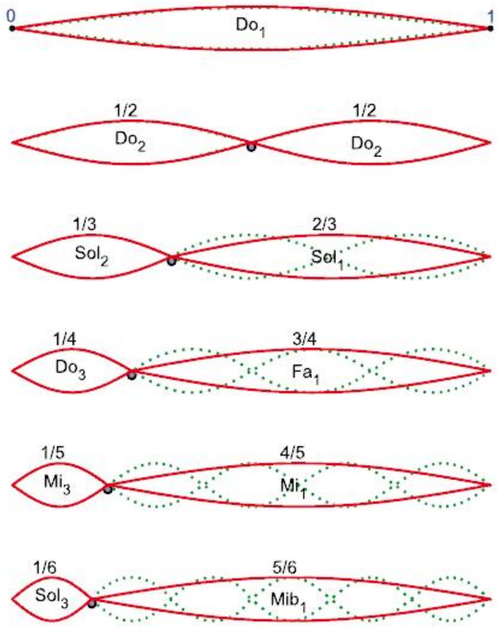
Supponendo che il nostro suono fondamentale sia un Do si hanno le seguenti armoniche:



Quindi dividendo una corda Do in due parti pari a:

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{n-1}{n} \qquad n \geq 2$$

otteniamo i seguenti suoni:



Ciò può essere trasportato su una qualsiasi altra nota fondamentale, fermo restando il valore degli intervalli fra nota e nota.

La forma dell'onda risulta dall'insieme delle armoniche che la compongono, e il numero delle armoniche che si accompagnano all'armonica fondamentale determina il *timbro* (vedi par.1.8.3) del suono.

La vibrazione effettiva di un dato punto della corda risulta dalla sovrapposizione delle vibrazioni corrispondenti ai singoli modi: essa è perciò descritta da una somma (teoricamente infinita) di funzioni periodiche semplici del tipo:

$$a_{\mathrm{n}} \cos \frac{2\pi n}{\tau} t \qquad \text{oppure} \qquad b_{\mathrm{n}} \sin \frac{2\pi n}{\tau} t$$

cioè da una serie di Fourier. Quindi il fatto che una corda possa oscillare con diverse frequenze contemporaneamente è un problema che viene risolto dalla teoria delle serie di Fourier. In pratica, però, solo alcuni (pochi) termini della serie contribuiscono effettivamente alla vibrazione totale della corda. Il nostro orecchio percepisce il risultato di queste vibrazioni come un suono regolare.

1.7 Teoria della consonanza

Quando più corde vengono percosse contemporaneamente, al nostro orecchio arriva la sovrapposizione delle vibrazioni di ciascuna di queste corde: la vibrazione totale è descritta perciò come somma di funzioni periodiche di diverso periodo. Se i periodi stanno tra loro in particolari rapporti, si ha quello che viene definito *suono musicale* (da 27 Hz a circa 4140

Hz), che può portare ad una sensazione gradevole, cioè un suono *consonante*, altrimenti si può percepire un suono sgradevole, cioè *dissonante* (vedi par. 1.1).

Se invece si sommano vibrazioni di frequenze qualsiasi (la funzione che rappresenta la vibrazione totale, essendo somma di funzioni con periodi qualsiasi, potrebbe non essere più neanche periodica) si ha una sensazione di suono non più regolare ma di *rumore*.

Galileo Galilei (1564-1642), nei *Discorsi intorno a due nuove scienze* (1638), attribuisce l'origine della consonanza al fatto che quando l'orecchio viene investito da due suoni di frequenze commensurabili (cioè esprimibili come rapporto di numeri interi), esso percepisce una regolarità del fenomeno che si ripete secondo un periodo di breve durata. Galileo rafforza l'argomento con una similitudine meccanica: se due pendoli vengono fatti oscillare in sincronia e completano l'oscillazione in 2 e 3 secondi rispettivamente, in breve (dopo 6 secondi, minimo comune multiplo tra 2 e 3) recuperano la sincronia. Se il rapporto delle frequenze non è commensurabile (inconcepibile per i Pitagorici) o comunque il rapporto è espresso da frazioni contenenti numeri elevati (es: $\frac{9}{8}$) il recupero della sincronia avviene solo dopo nove pulsazioni della nota più frequente, rendendo l'orecchio incapace di cogliere la regolarità (e quindi la consonanza) del fenomeno complessivo.

La teoria galileiana, benché suggestiva e sapientemente argomentata, si dimostra incompleta per tre motivi:

1. Il giudizio di consonanza tra due suoni non dipende solo dal rapporto delle frequenze ma anche dal valore assoluto delle frequenze stesse. Ad esempio negli strumenti ad elevata estensione, un intervallo di terza minore (rapporto $\frac{6}{5}$) diventa sempre meno consonante nel registro grave della tastiera (cioè a frequenze minori).

2. Nel ragionamento galileiano il suono è caratterizzato da un'unica frequenza, cioè un suono puro, ma quando una corda vibra, come si è scoperto dopo Galileo, essa emette un suono composto oltre che dall'armonica fondamentale anche da altre armoniche (vedi par.1.6).

3. L'attribuire alle regolarità delle vibrazioni del timpano la sensazione di consonanza è evidentemente una forzatura se non si conosce l'elaborazione che di tale vibrazione meccanica viene fatta a livello cerebrale.

Hermann von Helmholtz (1821-1894) elabora una teoria sulla percezione dei suoni che permette, in parte, di superare le tre difficoltà precedenti.

Egli sostenne, sulla base della sua analisi del suono, che consonanze e dissonanze dipendessero rispettivamente dal minor o maggior numero di battimenti che si producono fra i suoni che costituiscono l'intervallo e fra i rispettivi armonici. Secondo tale teoria, uno stesso intervallo può risultare più o meno consonante o dissonante a seconda dell'altezza in cui si produce e del timbro dei suoni (determinato dagli armonici). Secondo Helmholtz, infatti, suoni molto ravvicinati in frequenza inducono dissonanza poiché generano confusione a livello di elaborazione cerebrale. Inoltre propose una distinzione netta fra intervalli consonanti e intervalli dissonanti, gli uni definiti da suoni aventi armonici in comune, gli altri da suoni privi di essi.

La teoria di Helmholtz non offre un criterio oggettivo per stabilire una gerarchia di suoni consonanti, e oggi sono molti gli sforzi di fisici, musicisti e ingegneri acustici per trovare delle leggi che stabiliscano in maniera univoca tale gerarchia. Il problema principale dipende dal fatto che il tasso di maggiore o minore consonanza dipende da tanti altri parametri come: altezze (par.1.8.1), timbri (par.1.8.3), dinamiche, ecc....

Nella teoria musicale occidentale odierna abbiamo visto che vengono considerati consonanti tutti gli intervalli giusti, e le terze e seste maggiori o minori. Ma, come vedremo nel prossimo capitolo, la determinazione dei suoni consonanti è mutata nel tempo.

1.8 Caratteri fisici del suono

Il suono ha tre caratteri fisici distintivi: altezza, timbro ed intensità.

1.8.1 Altezza

L'*altezza*, da un punto di vista percettivo, è influenzata anche dall'intensità e dal timbro e permette di distinguere un suono *acuto* da uno *grave*, quindi le note. L'altezza di un suono puro, descritto da un'onda periodica sinusoidale, dipende dalla frequenza ν delle vibrazioni, cioè dal numero di oscillazioni che avvengono nel periodo T di propagazione dell'onda.

Come già detto nel paragrafo 1.2, l'orecchio umano è in grado di percepire suoni la cui frequenza è compresa tra circa 15 Hz e 20000 Hz, e tali valori prendono il nome di *limiti di udibilità*. In realtà nella pratica musicale si utilizza un intervallo di frequenze più ristretto, che va dai 20 Hz ai 4000 Hz, che corrisponde alle sette ottave del pianoforte. L'orecchio infatti è maggiormente sensibile in questa regione dello spettro sonoro.

Noto l'intervallo delle frequenze udibili è possibile calcolare la lunghezza d'onda dei suoni corrispondenti. Ricordando che la velocità v del suono nell'aria è di circa 340 m/s, e che:

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad \lambda = vT \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{v}{\nu} \tag{1.32}$$

sostituendo alla frequenza ν i limiti di udibilità otteniamo lunghezze d'onda comprese fra 17 m (suoni molto gravi, a bassa frequenza) e 1,7 cm (suoni molto acuti, ad alta frequenza).

Ciò è importante in quanto fornisce un criterio relativo alla capacità dell'onda sonora di aggirare gli ostacoli e un criterio di percezione dell'altezza di un suono in relazione alla dimensione degli ambienti in cui viene prodotto.

Se il suono non è puro abbiamo visto che viene descritto da un'onda periodica ma non di forma sinusoidale. Come determinarne l'altezza?

In questo caso il sistema percettivo, benché sollecitato simultaneamente da suoni a più frequenze, non percepisce i singoli suoni distinti, ma li fonde in un unico suono al quale è in grado di attribuire una sensazione di altezza in modo netto. L'altezza percepita corrisponde all'altezza della sola armonica fondamentale di frequenza ν_0. A livello percettivo le altre armoniche contribuiscono a determinare il *timbro* del suono.

1.8.2 Intensità

L'*intensità* permette di percepire un suono con maggiore o minore sonorità (forte o piano). Essa è inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra la sorgente sonora e l'ascoltatore e nei suoni puri è direttamente proporzionale al quadrato dell'ampiezza delle vibrazioni. Quindi l'intensità dipende dalla distanza dell'ascoltatore dalla sorgente sonora e dalla forza con cui i corpi sonori vengono eccitati.

Si definisce *soglia di udibilità* la minima intensità sonora $I_{\min}$ che l'orecchio umano è in grado di percepire. L'esperienza mostra che tale soglia varia da individuo a individuo (per esempio si innalza all'aumentare dell'età del soggetto), e soprattutto che, anche per un singolo individuo, essa dipende dalla frequenza del suono ascoltato. In genere si usa riferirsi ad un valore convenzionale, ottenuto mediando la soglia di udibilità di molti individui per un suono puro di frequenza di 1000 Hz. Il valore di tale soglia vale:

$$I_{\min} = 10^{-12} W/m^2 \tag{1.33}$$

All'altro estremo del campo di intensità si trova la soglia del dolore, cioè la massima intensità che l'orecchio umano è in grado di percepire e oltre la quale il suono viene sostituito da una sensazione di dolore. Questo valore è pari a:

$$I_{\max} = 1 W/m^2 \tag{1.34}$$

ed è 10^{12} volte più grande della soglia di udibilità.

Quindi il campo di variazione delle intensità sonore è estremamente ampio, e questa grande variabilità, assieme al fatto che l'orecchio è sensibile alle variazioni di pressione, determina la scelta di esprimere la misura dell'intensità del suono mediante una scala logaritmica. Si definisce perciò il *livello di intensità sonora* come:

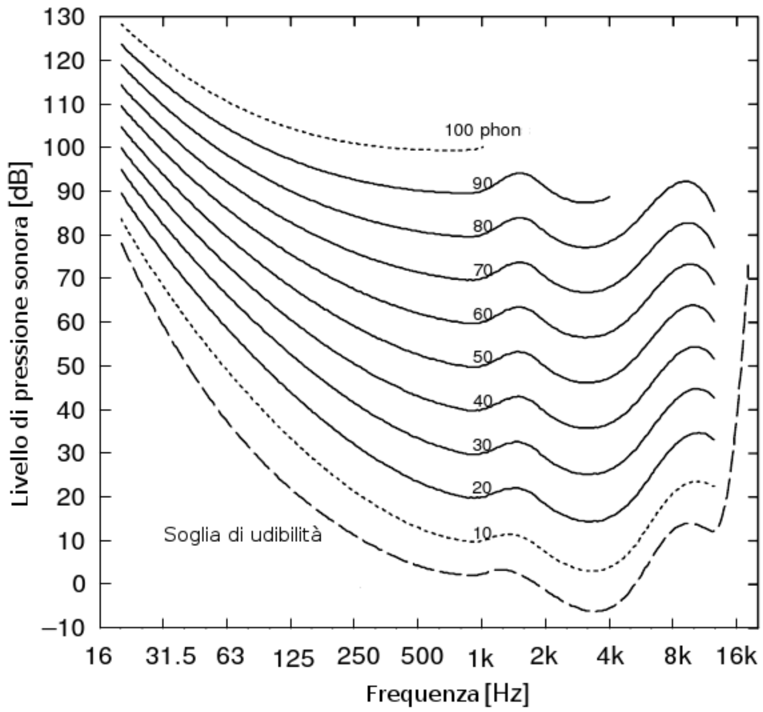
$$I(dB_{SIL}) = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_{min}} \right) \tag{1.35}$$

Il livello di intensità è una quantità adimensionale al quale si attribuisce per convenzione un'unità di misura: il decibel dB. Tale unità di misura non appartiene al sistema internazionale.

Dalla (1.35) possiamo verificare che il livello d'intensità relativo alla soglia di udibilità è di 0 dB:

$$I_{min}^{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{I_{min}}{I_{max}} \right) \tag{1.36}$$

L'intensità sonora I^{dB} non descrive correttamente l'intensità percepita, in quanto essa dipende dalla frequenza del suono e, in misura minore, anche dal timbro. Per descrivere adeguatamente il legame tra l'intesità percepita e quella sonora si è pensato di ricorrere alla rappresentazione mediante curve isofoniche che riportano, al variare della frequenza, il luogo geometrico dei punti per i quali l'intensità percepita è costante. Esse vengono ottenute, mentre ascoltiamo suoni di diversa frequenza, regolando la manopola del volume, in modo da percepirli con la stessa intensità. Le curve che si ottengono sono illustrate nel seguente grafico:



dove il *phon* è un'unità di misura dell'intensità percepita, ed è stato introdotto per differenziare quest'ultima dall'intensità sonora (in dB).

1.8.3 Timbro

Il *timbro*, da un punto di vista percettivo, permette di distinguere i suoni prodotti da sorgenti sonore diverse. Esso dipende principlamente dalla forma dell'onda, determinata dalla sovrapposizione delle onde caratterizzate dai suoni fondamentali e dai loro armonici (vedi par. 1.6). Il timbro dipende dalla materia e dalla costituzione della fonte sonora e consente di distinguere due suoni aventi uguale altezza ed intensità.

Nella concezione classica si supponeva che il timbro dei suoni ad altezza determinata dipendesse unicamente dalla composizione spettrale del suono, cioè dalla distribuzione dell'energia (e quindi delle ampiezze) tra nota fondamentale e le altre armoniche. Ad ogni composizione spettrale corrisponde una precisa forma d'onda, ecco spiegato perchè il timbro dipende principalmente dalla forma dell'onda.

Questa teoria, elaborata principalmente da Helmholtz, è valida solo in prima approssimazione, in quanto si è potuto constatare che i suoni prodotti da strumenti musicali tradizionali sono caratterizzati da andamenti spettrali che variano nel tempo, quindi il timbro dipende non solo dall'energia nello spettro di frequenza ma anche da fattori temporali. Per studiare i fattori temporali, l'evoluzione di un suono viene divisa in tre parti: attacco, tenuta e decadimento. Durante queste fasi il contenuto spettrale del suono emesso varia nel tempo. Quindi, ad esempio, il timbro del suono di un pianoforte non è più lo stesso se ne ascoltiamo la riproduzione rovesciata, sebbene il suono originale e il suo inverso abbiano lo stesso spettro medio.

Da un punto di vista metodologico, l'indagine sul timbro viene condotta analizzando il suono fisico e individuando un modello percettivo che definisca le modalità di organizzazione dei parametri acustici da parte del nostro sistema percettivo. La tecnica d'analisi maggiormente usata è quella additiva, che fornisce una rappresentazione nel tempo della variazione di ampiezza e frequenza delle componenti elementari del suono. Mediante un grafico tridimensionale (ampiezza, frequenza, tempo) è possibile tracciare una rappresentazione molto intuitiva del suono fisico che, in prima approssimazione, si avvicina al tipo di analisi condotta dal sistema percettivo. Analizzando con questa tecnica molti suoni musicali è stato dimostrato che le varie componenti hanno inviluppi d'ampiezza e frequenza indipendenti. Si è accertato inoltre che, in ordine al timbro, il nostro orecchio presta molta attenzione all'istante d'inizio di queste componenti e, in particolare, se iniziano tutte assieme o con brevi ritardi; mentre non sempre l'inviluppo di frequenza risulta determinante per la caratterizzazione del timbro.

Capitolo 2

La scala pitagorica e quella naturale

2.1 La scala Pitagorica

Il più antico procedimento per dividere l'ottava in un dato numero di parti risale ai primi tempi dell'antica civiltà cinese. In seguito fu utilizzato dai teorici giapponesi e, con autonoma ideazione, dai pitagorici.

Esso consiste in una progressione di intervalli di quinta, e fu il primo tentativo nella ricerca di una relazione tra fisica del suono e numero.

Pitagora basò la sua dottrina sui numeri interi, specie quelli dall'1 al 4 in quanto la loro somma, la cosiddetta *tetraktys*, corrispondeva al numero perfetto per eccellenza, il 10. Studiando la musica a scopi catartici scoprì come le altezze dei suoni fossero legate fra loro da rapporti di numeri interi, ovvero da numeri razionali, da cui il motto *tutto è numero (razionale)*.

Secondo un aneddoto la scoperta avvenne percuotendo un'anfora ripiena d'acqua che poi, riempita ulteriormente, emetteva la stessa nota ma più acuta. Esistono diverse varianti dell'aneddoto, Giamblico di Calcide, ad esempio, raccontò che l'intuizione di Pitagora sarebbe merito di un fabbro che martellava il ferro con mazze di grandezze diverse: tra i tintinnii che venivano prodotti dai colpi alcuni risultavano più gradevoli di altri. Fu così che Pitagora scoprì che i martelli i cui pesi stavano in precisi rapporti producevano dei suoni consonanti.

Le consonanze fra i suoni furono studiate dai pitagorici analizzando i suoni prodotti dalle corde elastiche del monocordo, uno strumento costituito da una corda tesa tra due estremi fissi, al di sotto della quale scorre liberamente un ponticello mobile atto a spezzare la corda in due segmenti di lunghezza variabile. Ascoltando il suono prodotto da questi due segmenti di corda, ci si accorse che si otteneva un suono consonante solo quando, dal rapporto tra le misure delle due parti, risultava una frazione costituita da due numeri interi piccoli. Ponendo in relazioni tutti i numeri dall'1 al 4, Pitagora credette di ottenere tutte le consonanze, che possono essere riassunte nella seguente tabella:

Intervallo (consonante)	Rapponto lunghezze	Rapporto frequenze
Unisono	1:1	1:1
Quarta Giusta	3:4	4:3
Quinta Giusta	2:3	3:2
Ottava	1:2	2:1

Quindi, per esempio, prendendo due corde uguali ma lunghe una il triplo dell'altra, si producono suoni distanti una quinta ma in due ottave differenti:

$$\frac{3}{1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \tag{2.1}$$

Tale proprietà vale anche premendo la corda in un punto posto ad un preciso rapporto di distanza: ad esempio premendo la corda a metà della sua lunghezza l e pizzicando una delle sue metà, si ottiene un nota ad un'ottava superiore. Infatti:

$$l : \frac{l}{2} = 1 : \frac{1}{2} = 2 : 1 \tag{2.2}$$

Se chiamiamo Do la nota emessa dalla corda libera, dimezzandola si ottiene il Do all'ottava superiore. L'intervallo di quinta giusta si ottiene riducendo la corda ai suoi $\frac{2}{3}$, quindi in tal modo otteniamo un Sol:

$$l : \frac{2}{3}l = 3 : 2 \tag{2.3}$$

L'intervallo di quarta giusta, invece si ottiene riducendola ai suoi $\frac{3}{4}$, e si ha quindi un Fa:

$$l : \frac{3}{4}l = 4 : 3 \tag{2.4}$$

Pensando l'intervallo di quarta come una quinta discendente:

$$\frac{2}{1} : \frac{3}{2} = \frac{4}{3} \tag{2.5}$$

2.1.1 Costruzione della scala pitagorica

La scala pitagorica parte dai rapporti numerici corrispondenti agli intervalli consonanti ((2.2), (2.3) e (2.4)) e, scelta una nota di riferimento, si iniziano a generare intervalli di quinta. Essi si possono ottenere moltiplicando la frequenza[1] di partenza per $\frac{3}{2}$, in tal modo le note sono generate per quinte ascendenti. Già con la seconda moltiplicazione però, si ottengono frequenze di suoni che si trovano all'ottava superiore rispetto quella che contiene la nota di riferimento. Per riportare tali frequenze nell'ambito dell'ottava di partenza si divide la frequenza così ottenuta per 2^n, dove n è il numero di ottave che si sono "percorse" dall'ottava di partenza. Ad esempio, partendo dal Do come nota di riferimento si ottiene[2]:

[1] Per ulteriori approfondimenti si veda l'appendice A.

[2] Nomenclatura intervalli: G=giusto, M=Maggiore, A=aumentato

Regola generativa	Rapporto frequenze	Nota	Intervallo
–	1 : 1	Do	Unisono
$\frac{3}{2}$	3 : 2	Sol	5ªG
$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$	9 : 8	Re	2ªM
$\left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$	27 : 16	La	6ªM
$\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$	81 : 64	Mi	3ªM
$\left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$	243 : 128	Si	7ªM
$\left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$	729 : 512	Fa#	4ªA
...	...	...	...

Si possono generare note anche tramite intervalli di quinte discendenti: è sufficiente dividere ripetutamente la frequenza di partenza per $\frac{3}{2}$. In analogia col caso precedente delle quinte discendenti, per riportare l'insieme delle note nell'ambito dell'ottava di partenza si moltiplica la frequenza ottenuta per 2^n. Quindi, sempre partendo dal Do come nota di partenza si ottiene[3]:

Regola generativa	Rapporto frequenze	Nota	Intervallo
–	1 : 1	Do	Unisono
$\frac{2}{3} \cdot 2$	4 : 3	Fa	4ªG
$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 2^2$	16 : 9	Si b	7ªm
$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 2^2$	32 : 27	Mi b	3ªm
$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot 2^3$	128 : 81	La b	6ªm
$\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot 2^3$	256 : 243	Re b	2ªm
$\left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot 2^4$	1024 : 729	Sol b	5ªd
...	...	...	...

Possiamo riassumere la regola generativa con la seguente espressione:

$$z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^k r_n \qquad n \in \mathbb{Z}, 1 \leq r_n < 2 \tag{2.6}$$

dove r_n rappresenta la nota ottenuta attraverso il procedimento per quinte descritto, e k il numero di ottave che distano da quella di partenza.

Unendo i due cicli di quinte, ascendenti e discendenti, si possono ottenere infiniti intervalli. Tuttavia la scala ha senso solo se ne contiene un numero finito, poichè l'orecchio non è in grado di distinguerli tutti. Potenzialmente il meccanismo generativo illustrato è in grado di dividere l'ottava in un numero infinito di parti, rendendo gli intervalli fra due

[3] m=minore, d=diminuito

note sempre più piccoli, addirittura al di là della soglia di discriminazione delle frequenze dell'orecchio.

2.1.2 La scala diatonica pitagorica

La scelta delle note della scala deve soddisfare esigenze di carattere estetico (consonanza) e di facilità d'intonazione (uniformità dei gradi consecutivi della scala). Si può riprendere il meccanismo per quinte descritto nel par.2.1.1, partendo dal Do_3 come nota di riferimento, la cui frequenza è di 261.6 Hz [4]:

$$Do_3 = 261.6 \tag{2.7}$$

Moltiplicando per $\frac{3}{2}$ si sale di una quinta, quindi:

$$Sol_3 = 261.6 \cdot \frac{3}{2} = 392.4 \tag{2.8}$$

Invece dividendo per $\frac{3}{2}$ si scende di una quinta, ottenendo il Fa_2 che si trova nell'ottava precedente. Per riportarla nell'ottava di riferimento è sufficiente moltiplicare per 2:

$$Fa_2 = 261.6 : \frac{3}{2} = 174.4 \quad \Rightarrow \quad Fa_3 = 174.4 \cdot 2 = 348.8 \tag{2.9}$$

Iterando il ragionamento per quinte ascendenti a partire dal Sol_3 si ottengono le altre note della scala:

$$Re_4 = 392.4 \cdot \frac{3}{2} = 588.6 \quad \Rightarrow \quad Re_3 = 588.6 : 2 = 294.3 \tag{2.10}$$

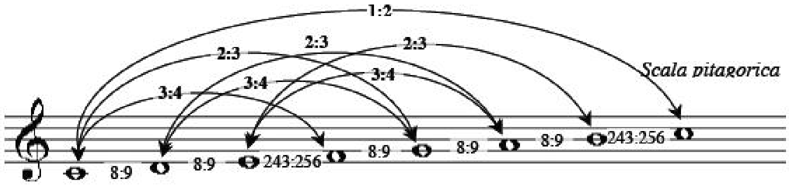
$$La_3 = 294.3 \cdot \frac{3}{2} = 441.5 \tag{2.11}$$

$$Mi_3 = 441.5 \cdot \frac{3}{2} = 662.25 \quad \Rightarrow \quad Mi_3 = 662.25 : 2 = 331.1 \tag{2.12}$$

$$Si_3 = 331.1 \cdot \frac{3}{2} = 496.7 \tag{2.13}$$

$$\tag{2.14}$$

In tal modo si ottiene la *scala diatonica pitagorica*, costituita da 7 note primarie.



[4]Esistono diverse notazioni per indicare l'altezza dei suoni. In quello franco-belga il Do_3 corrisponde al Do centrale del pianoforte.

Nota	Rapporto	Frequenza (Hertz)	cent	Distanza
Do	1 : 1	261.6	0	–
Re	9 : 8	294.3	204	Tono
Mi	81 : 64	331.1	408	Tono
Fa	4 : 3	348.8	498	Semitono
Sol	3 : 2	392.4	702	Tono
La	27 : 16	441.5	906	Tono
Si	243 : 128	496.7	1110	Tono
Do	2 : 1	523.2	1200	Semitono

Dalla tabella si può notare che i gradi consecutivi della scala presentano solo due tipi di intervalli:

il tono pitagorico pari a circa 204 cent[5], il cui rapporto è $\frac{9}{8} = \frac{3^2}{2^3}$;

il semitono pitagorico pari a circa 90 cent, il cui rapporto è $\frac{256}{243} = \frac{2^8}{3^5}$.

Tuttavia un semitono non è la metà di un tono:

$$\frac{256}{243} \cdot \frac{256}{243} = \frac{2^8}{3^5} < \frac{9}{8} \tag{2.15}$$

Il rapporto tra i due valori è il *comma pitagorico*[6]:

$$\frac{9}{8} : \left(\frac{256}{243}\right)^2 = \frac{3^{12}}{2^{19}} \tag{2.16}$$

e vale circa un quarto di semitono temperato, si tratta precisamente di 23.46 cents.

Cambiando la nota di partenza della scala cambia la posizione dei *semitoni pitagorici*, da ciò i Greci svilupparono vari *modi musicali* la cui denominazione deriva dalle regioni dell'antica Grecia nei queli essi hanno avuto orgine (Ionico, Dorico, Frigio, Lidio, Misolidio, Eolio, Locrio).

Inoltre dalla tabella si può notare che tutti gli intervalli di ottava e di quinta sono consonanti poichè coincidono con i rapporti semplici 3:2 e 2:1. Gli intervalli di terza e sesta, invece, sono espressi da rapporti che coinvolgono numeri piuttosto grandi. Se, ragionando pitagoricamente, il criterio della consonanza è quello dei rapporti semplici, tali intervalli risultano essere dissonanti.

[5]Il cent è un'unità di misura degli intervalli introdotta dal matematico e musicologo A. Ellis. Per ulteriori approfondimenti si veda l'appendice A.

[6]Il *comma* è la differenza infinitesimale di frequenza fra due suoni di altezza quasi uguale.

2.1.3 La scala cromatica pitagorica

Come per ogni scala diatonica, il numero limitato di note offre una limitata gamma di possibilità melodiche. Questo svantaggio può essere superato aumentando il numero di note facenti parte della scala. Esse però non devono compromettere i vantaggi della scala diatonica, quindi devono:

1. continuare a garantire la consonanza degli intervalli di ottava e quinta;
2. rendere il più possibile uniformi i gradi consecutivi della scala;
3. essere in numero non eccessivo in modo da non avere frequenze troppo ravvicinate.

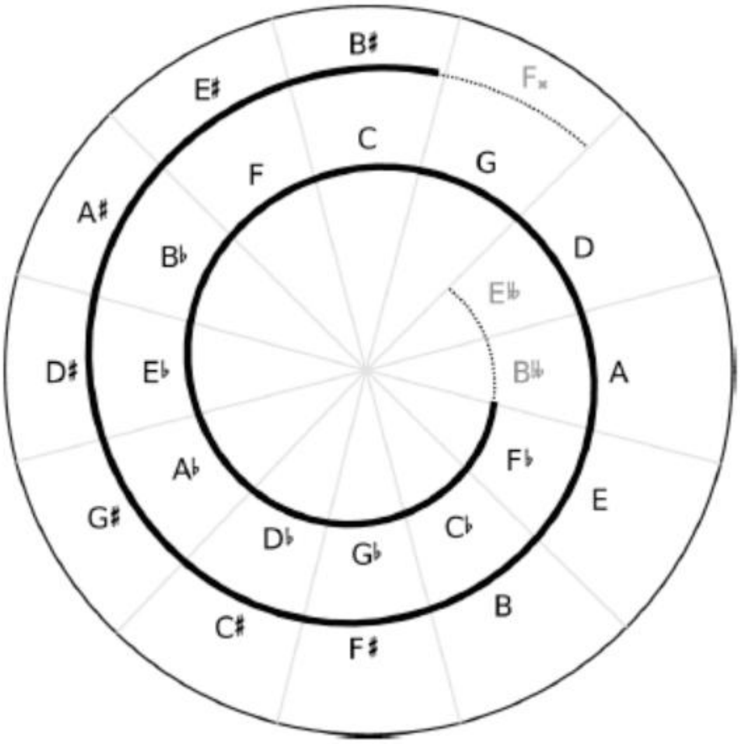
Inserendo le note alterate che si ottengono unendo l'inizio dei due cicli di quinte ascendenti e discendenti si ottiene la *scala cromatica pitagorica*:

Nota	Rapporto	Frequenza (Hertz)	cent
Do	1 : 1	261.6	0
Do#	2178 : 2048	279.4	114
Re	9 : 8	294.3	204
Mib	32 : 27	310.1	294
Mi	81 : 64	331.1	408
Fa	4 : 3	348.8	498
Fa#	729 : 512	372.5	612
Sol	3 : 2	392.4	702
Sol#	6561 : 4096	419.1	816
La	27 : 16	441.5	906
Sib	16 : 9	456.1	996
Si	243 : 128	496.7	1110
Do	2 : 1	523.2	1200

Osservazione 4. *Fra le note alterate sono state omesse quelle che nel temperamento equabile(vedi par. 3.1) sono enarmoniche, ad esempio è stato inserio il Do#, il cui rapporto è* 2187 : 2048*, ma non il* Reb*, il cui rapporto è* 256 : 243*. Contrariamente a quanto accade nelle scale basate sul temperamento equabile tali suoni non sono omofoni, distano un* comma pitagorico*(vedi par.2.1.2) . Aggiungendo le note omesse la scala avrebbe 17 gradi anzichè 12.*

Continuando a moltiplicare la successione delle frequenze per $\frac{3}{2}$ o per $\frac{2}{3}$ accade che il circolo delle quinte non si "chiude", esso è in realtà un'elicoide delle quinte[7].

[7]Nell'immagine della spirale delle quinte le note rappresentanti le tonalità sono espresse secondo la notazione letterale in uso nei paesi di lingue inglese e tedesca: A=La, B=Si (per i Tedeschi B=Sib e H=Si), C=Do, D=Re, E=Mi, F=Fa, G=Sol.



Infatti se si parte da una qualsiasi nota e si sale di 12 quinte, si dovrebbe ritrovare la stessa nota 7 ottave più in alto, ma seguendo il meccanismo della scala pitagorica:

$$129,7 = \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \neq 2^7 = 128$$

Teorema 2. *Il sistema di intervalli ottenuto applicando il meccanismo per quinte ascendenti e discendenti non è chiuso*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che il sistema sia chiuso. Applicando il logaritmo in base 2 alla (2.6) otteniamo:

$$n\alpha = k + \log_2 r_n \qquad \text{con}\, \alpha = log_2\left(\frac{3}{2}\right) \tag{2.17}$$

$$\Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z}, \text{con}\, m \neq n, \text{t.c.}\, r_m = r_n \tag{2.18}$$

$$\Rightarrow m\alpha - k_1 = n\alpha - k_2 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{k_1 - k_2}{m - n} = \frac{p}{q} \tag{2.19}$$

cioè $\alpha \in \mathbb{Q}$. Ma allora si avrebbe:

$$\frac{3}{2} = 2^{\frac{p}{q}} \qquad \Rightarrow \qquad 3^q = 2^{p-q} \tag{2.20}$$

Quindi il primo termine è sempre dispari e il secondo pari.
Contraddizione. $\square$

Osservazione 5. $\alpha = log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ *è un numero irrazionale.*

La scala cromatica così costruita conserva la consonanza degli intervalli di ottava e di quinta, manca però la quinta Sol# - Re# poichè il Re# è stato omesso. Nel sistema temperato equabile Mib è l'enarmonico di Re#, ma nella scala pitagorica l'intervallo Sol# - Mib risulta essere dissonante. Anche gli intervalli di sesta e terza continuano ad essere poco consonanti.

Tale scelta però ha il vantaggio di avere le frequenze tra due gradi consecutivi non troppo ravvicinate. Inoltre in questo modo si è riusciti ad uniformizzare sufficientemente i gradi della scala: tale uniformità è stata ottenuta inserendo le note alterate quasi a metà del tono pitagorico. Conseguentemente nella scala cromatica esistono solo due intervalli: il *limma* e l'*apotome*, la cui somma dà il *tono pitagorico* e la differenza il *comma pitagorico*.

La mancata consonanza degli intervalli di terza e di sesta rappresenta un problema non solo nella corretta intonazione di tali intervalli, ma può causare fastidiosi battimenti (vedi par. 1.4) nell'esecuzione simultanea di bicordi, soprattutto in presenza di strumenti ricchi di armonici (vedi par. 1.6) di ordine superiore. Il quinto armonico naturale del Do, ad esempio, viene a trovarsi molto vicino in frequenza al quarto armonico del Mi pitagorico. Se consideriamo la frequenza del Do_3=261.6 Hz, il suo quinto armonico naturale avrà una frequenza pari a

$$261.6 \cdot 5 = 1308Hz$$

Il quarto armonico naturale del Mi_3=331.1 Hz avrà invece una frequenza pari a:

$$331.4 \cdot 4 = 1332.4Hz$$

La frequenza del battimento è data dalla differenza delle due frequenze calcolate, e vale circa 25 Hz. Tale valore, secondo la teoria delle bande critiche di von Helmhotz[8], cade proprio nella fascia di valori che conferiscono al suono un carattere aspro e sgradevole.

2.2 La scala naturale tolemaico-zarliniana

Il secondo principio per dividere l'ottava in un dato numero di parti fu ideato da Archita, tarantino di scuola greca (430-348 a.C.), e fu ripreso dai greco-latini Didimo (I sec. a.C.), e Tolomeo (83-161 d.C.), ma trovò applicazione pratica solo con l'avvento della *musica tonale* e con la successiva teorizzazione formulata da Gioseffo Zarlino (1517-1590) nel 1558.

Mentre il sistema pitagorico prevedeva la divisione della corda in 2, 3 o 4 parti, la novità del sistema tolemaico consisteva nella possibilità di andare oltre, e quindi di dividere la corda in 5 e 6 parti.

Per dividere la corda anche Tolomeo utilizzò il monocordo: ponendo il ponticello mobile ai $\frac{4}{5}$ della corda si ottiene (con procedura analoga a quella adottata per gli intervalli di

[8]Una banda critica è un intervallo di frequenze entro alla quale due toni puri simultanei non possono essere percepiti come distinti

ottava, quinta e quarta) l'intervallo di terza maggiore. Detta l la lunghezza della corda:

$$l : \frac{4}{5}l = 5 : 4$$

Ponendo il ponticello mobile ai $\frac{5}{6}$ della corda si ottiene, invece, l'intervallo di terza minore:

$$l : \frac{5}{6}l = 6 : 5$$

Gli intervalli di terza non erano ritenuti abbastanza consonanti dai Greci, pertanto inizialmente questa scala non ebbe successo e non fu tramandata.

Gli altri intervalli si ottenevano come semplice interpolazione di quelli già determinati:

- la seconda maggiore come differenza[9] fra una quinta e una quarta giusta: $\frac{3}{2} : \frac{4}{3} = \frac{9}{8}$
- la sesta maggiore come somma fra una quarta giusta e una terza maggiore: $\frac{4}{3} : \frac{5}{4} = \frac{5}{3}$
- la settima maggiore come somma di una quinta giusta e di una terza maggiore: $\frac{3}{2} : \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$

Intervallo	Rapponto lunghezze	Rapporto frequenze
Unisono	1 : 1	1 : 1
Seconda Maggiore	8 : 9	9 : 8
Terza Maggiore	4 : 5	5 : 4
Quarta Giusta	3 : 4	4 : 3
Quinta Giusta	2 : 3	3 : 2
Sesta Maggiore	3 : 5	5 : 3
Settima Maggiore	8 : 15	15 : 8
Ottava	1 : 2	2 : 1

La scala zarliniana si è imposta inizialmente per motivi legati alla maggior consonanza degli intervalli di terza. I suoni che costituiscono tale scala non hanno solo un fondamento estetico, infatti attingono dalla serie degli armonici naturali di una nota di riferimento, perciò viene detta anche *scala naturale*. Tale serie può essere generata scegliendo una nota di riferimento e moltiplicandone la frequenza per 2, 3, 4 ecc.... Per riportare le note così generate nell'ambito dell'ottava di partenza si segue lo stesso procedimento visto nella costruzione della scala pitagorica: si divide la loro frequenza per 2^n dove n indica il numero di ottave "percorse" dalla nota di partenza. Infine si eliminano gli eventuali "doppioni" ottenuti. Quindi partendo dalla nota Do si ottiene:

[9] Per *differenza* si intende la differenza fra i logaritmi delle frequenze. Analogamente per *somma* si intende il prodotto fra i logaritmi delle frequenze. Per un maggior approfondimento si veda l'appendice A.

Armonico	Rapporto	Nota
1	1 : 1	Do
2	2 : 1	Do
3	3 : 2	Sol
4	2 : 1	Do
5	5 : 4	Mi
6	3 : 2	Sol
7	7 : 4	Sib
8	2 : 1	Do
9	9 : 8	Re
10	5 : 4	Mi
11	11 : 8	Sol$b$
12	3 : 2	Sol
13	13 : 8	Lab
14	7 : 4	Sib
15	15 : 8	Si
16	2 : 1	Do
17	17 : 8	Do#
18	9 : 8	Re
19	19 : 18	Re#
20	5 : 4	Mi
...	...	...

Resta quindi il problema di decidere quante note distinte includere nella scala. La tradizione impone il numero 7 per la *scala diatonica* e 12 per la *scala cromatica*.

2.2.1 La scala diatonica naturale

La scala diatonica naturale in teoria dovrebbe costruirsi attingendo dalla serie degli armonici naturale le sette note prive di alterazioni. In realtà è stata costruita "ritoccando" quella pitagorica. Nella costruzione si può partire dal Mi_5 che, come si può vedere dalla tabella, è il quinto armonico del Do_1 la cui frequenza $\nu = 261.6$ Hz. Riportandolo nell'ottava di partenza si ottiene il rapporto di terza maggiore:

$$Mi_5 = 5\nu \quad \rightarrow \quad Mi_3 = \frac{5}{4}\nu \tag{2.21}$$

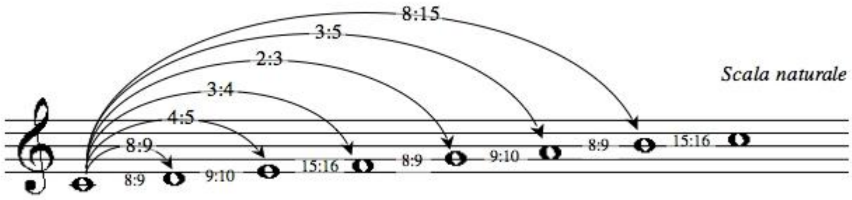
Partendo dal Mi_3 e salendo e scendendo di una quinta (ricordando sempre di riportare le nota nell'ottava di partenza) si ottengono :

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{8} \quad \rightarrow \quad Si_3 = \frac{15}{8}\nu \tag{2.22}$$

$$\frac{5}{4} : \frac{3}{2} = \frac{5}{6} \quad \rightarrow \quad \frac{5}{6} \cdot 2 = \frac{5}{3} \quad \rightarrow \quad La_3 = \frac{5}{3}\nu \tag{2.23}$$

Possiamo riassumere i risultati ottenuti nella seguente tabella:

Nota	Rapporto	Frequenza (Hz)	Cent	Distanza
Do	1 : 1	261.6	-	-
Re	9 : 8	294.3	204	Tono Maggiore
Mi	5 : 4	327.0	182	Tono minore
Fa	4 : 3	348.8	112	Semitono diatonico
Sol	3 : 2	392.4	204	Tono Maggiore
La	5 : 3	436.0	182	Tono minore
Si	15 : 8	490.5	204	Tono Maggiore
Do	2 : 1	523.3	112	Semitono diatonico



In questa scala si possono individuare 3 tipi di intervallo:

tono maggiore, che si trova fra il I e il II (fra il IV e il V e fra il VI e il VII) grado della scala, quindi il suo rapporto è:

$$\frac{9}{8} : \frac{1}{1} = \frac{9}{8} \tag{2.24}$$

tono minore, che si trova fra il II e il III (e fra V e VI) grado della scala, quindi il suo rapporto è:

$$\frac{5}{4} : \frac{9}{8} = \frac{10}{9} \tag{2.25}$$

semitono diatonico, lo si trova fra il III e il IV (e fra il VII e l'VIII) grado della scala, quindi il suo rapporto è:

$$\frac{4}{3} : \frac{5}{4} = \frac{16}{15} \tag{2.26}$$

La differenza fra tono maggiore e tono minore è di $\frac{81}{80}$ ed è detta *comma di Didimo* o *comma sintonico*, e misura circa 21.5 cent, poco meno del comma pitagorico (2.16).

La differenza tra tono minore e semitono diatonico è di $\frac{25}{24}$ ed è detta *semitono cromatico*.

2.2.2 La scala naturale cromatica

Il numero di note della scala naturale si stabilizzò nel Medioevo a 12. Esse si ottengono aggiungendo alle 7 note della scala diatonica naturale 5 note *alterate*. La scala diatonica naturale, come ogni scala diatonica, offre un limitato numero di note, quindi una limitata gamma di possibilità melodiche. Con la scala cromatica naturale tale limite viene superato, ma le nuove note immesse non devono compromettere i vantaggi della scala diatonica. Quindi esse devono:

1. preservare, per quanto possibile, la consonanza degli intervalli più importanti (ottava, quinta e terza);

2. rendere il più possibile uniformi i gradi consecutivi della scala;

La scelta dei rapporti di frequenza per la costruzione della scala cromatica non è univoca. Proprio per questo nella costruzione della scala sono possibili vari criteri:

1. scegliere come semitono il *semitono diatonico*, pari a circa 112 cent. Utilizzando un semitono già presente nella scala diatonica, tale scelta conferisce a prima vista uniformità alla scala. Si tratta però di un'uniformità illusoria, sia a causa della differenza del tono maggiore e di quello minore, sia per la necessità di mantenere la consonanza tra gli intervalli. Ciò porta alla formazione di altri semitoni che indeboliscono l'uniformità dei gradi consecutivi della scala.

Nota	Rapporto	Frequenza (Hz)	Cent	Semitoni (cent)
Do	1 : 1	261.6	0	-
Do#	16 : 15	279.1	112	112
Re	9 : 8	294.3	204	92
Mi*b*	6 : 5	313.9	316	112
Mi	5 : 4	327.0	386	112
Fa	4 : 3	348.9	498	112
Fa#	45 : 32	367.9	590	92
Sol	3 : 2	392.4	702	112
Sol#	8 : 5	418.6	814	112
La	5 : 3	436.0	885	71
Si*b*	9 : 5	470.9	1018	133
Si	15 : 8	490.5	1088	71
Do	2 : 1	523.3	1200	112

2. Un altro criterio può essere quello che si basa sul *semitono cromatico*.

Nota	Rapporto	Frequenza (Hz)	Cent	Senitoni (cent)
Do	1 : 1	261.6	0	-
Do #	25 : 24	272.5	71	71
Re	9 : 8	294.3	204	133
Mi b	6 : 5	313.9	316	112
Mi	5 : 4	327.0	386	71
Fa	4 : 3	348.8	498	112
Fa #	25 : 18	363.4	569	71
Sol	3 : 2	392.4	702	133
Sol #	25 : 16	408.8	773	71
La	5 : 3	436.0	885	112
Si b	9 : 5	470.9	1018	133
Si	15 : 8	490.5	1088	71
Do	2 : 1	523.3	1200	112

Se si adotta come criterio di uniformità il numero di semitoni diversi contenuti nella scala, risulta essere più uniforme la scala con il semitono cromatico. Se invece come criterio di uniformità si adotta la varianza rispetto al "semitono medio" (di ampiezza 100 cent) risulta essere più uniforme la scala con il semitono diatonico.

Al di là dei diversi criteri adottati i semitoni che entrano in gioco nelle due scale sono pressoché indistinguibili all'orecchio.

Tale scala continua però ad avere gli stessi svantaggi della scala pitagorica.

2.3 Confronto tra scala pitagorica e scala naturale

Riportiamo i risultati ottenuti per la scala diatonica naturale e la scala diatonica pitagorica:

Nota	naturale		pitagorica	
	Rapporto	Frequenza	Rapporto	Frequenza
Do	1 : 1	261.6	1 : 1	261.6
Re	9 : 8	294.3	9 : 8	294.3
Mi	5 : 4	327.0	81 : 64	331.1
Fa	4 : 3	348.8	4 : 3	348.8
Sol	3 : 2	392.4	3 : 2	392.4
La	5 : 3	436.0	27 : 16	441.5
Si	15 : 8	490.5	243 : 128	496.7
Do	2 : 1	523.3	2 : 1	523.2

Dal confronto dei rapporti di frequenza si nota che quelli della scala naturale sono più semplici rispetto quelli della scala pitagorica, infatti essa prende anche il nome di *scala dei rapporti semplici*. Altra differenza fra le due scale è il numero di intervalli elementari: 2 per la scala pitagorica (tono e semitono pitagorico), 3 per quella naturale (tono maggiore, minore e semitono diatonico). Nel paragrafo 2.1.2 avevamo visto che nella scala pitagorica componendo due semitoni successivi non si ottiene un tono. Con la scala naturale la situazione non migliora, anzi:

$$\frac{15}{16} \cdot \frac{15}{16} < \frac{9}{10} < \frac{9}{8} \tag{2.27}$$

Nonostante ciò, gli intervalli di terza e sesta della scala naturale risultano essere più consonanti, e tale consonanza è particolarmente evidente quando, su di uno strumento ricco di armonici superiori, si esegue un bicordo o più in generale un accordo: si riscontra una coincidenza di molte delle armoniche superiori che, essendo esattamente sovrapposte in frequenza, non danno luogo al fenomeno dei battimenti. Proprio per questo la scala naturale è quella che si tende ad utilizzare quando si canta ad una o più voci. Inoltre, la scala naturale, come già visto col Mi_5, contiene i primi 5 armonici naurali, a differenza di quella pitagorica che contiene solo i primi 4. Infatti in quest'ultima, partendo dal Sol_3 e salendo di 3 quinte :

$$\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{81}{16} < 5 \tag{2.28}$$

Nonostante i pregi acustici della scala naturale rispetto quella pitagorica, rimangono alcuni difetti. Infatti alcune quinte giuste tra gradi della stessa scala non risultano essere molto consonanti: la quinta Re-La ha un rapporto di frequenze pari a $\frac{40}{27} < \frac{3}{2}$. Inoltre rimane il problema della dissonanza dell'intervallo Sol$\#$-Mi nella scala cromatica. Questa mancata consonanza è solo un aspetto di un problema più generale: il cambiamento di tonalità. Matematicamente si potrebbe dire che le due scale sono *invarianti per traslazioni*, ciò significa che iniziando la scala da una nota diversa dal Do, e mantenendo le altezze dei suoni come sono state ottenute partendo dal Do, la sequenza con cui si succedono i toni e i semitoni nella nuova scala cambia completamente. Nella musica greca tale variazione veniva utilizzata per generare i 7 modi greci, e ogni genere veniva eseguito in un solo specifico modo. Tuttavia, con l'avvento della polifonia e della musica tonale, questa proprietà non ha reso permesso la possibilità modulare da una tonalità ad un'altra. Inoltre questo risulta essere un grande limite anche per gli strumenti ad intonazione fissa (strumenti a tastiera, arpa, ecc...), infatti essi dovrebbero essere riaccordati per ogni cambio di tonalità.

Capitolo 3

Il sistema temperato

Il terzo procedimento per dividere l'ottava in un dato numero di parti fu codificato dall'organista e teorico A. Werckmeister nei trattati *Mukalische Temperatur* (1691) e *Hypomnemata musica* (1697), ed esemplificato nella sua globalità qualche decennio dopo da Bach (1685 - 1750) nel *Clavicembalo ben temperato*. Tale sistema prende il nome di *sistema temperato* e nacque per risolvere il problema del cambiamento di tonalità della scala pitagorica e di quella naturale, quindi non invarianti per traslazioni della tonica.

3.1 Il sistema temperato equabile

Il sistema temperato equabile fu descritto da Aristosseno di Taranto intorno al 320 a.C. e poi ripreso dal discepolo di Zarlino e padre di Galileo, Vincenzo Galilei (1520-1591), dai matematici Simone Stevino (1548-1620) e Giovanni Battista Benedetti (1530-1620). La soluzione di tale sistema fu quella di dividere la scala in n parti uguali.

La scala prodotta secondo il temperamento equabile si ottiene dividendo l'ottava in dodici parti uguali:

$$\frac{Do\#_3}{Do_3} = \frac{Re_3}{Do\#_3} = \cdots = \frac{Do_4}{Si_3} = k$$

Poichè l'ottava è rappresentata dal rapporto 2:1, l'intervallo più piccolo, detto *semitono temperato* è pari a:

$$\begin{aligned} \frac{Do_4}{Do_3} = k^{12} \quad &\Rightarrow \quad k^{12} = 2 \\ \Rightarrow \quad \sqrt[12]{2} &= 1.059463094... \simeq 1.06 \end{aligned} \tag{3.1}$$

cioè un numero irrazionale algebrico, che corrisponde esattamente a 100 cent.

Il semitono temperato risulta essere una via di mezzo fra quello diatonico e quello cromatico della scala naturale, infatti:

$$\frac{16}{15} \simeq 1.067 \qquad \frac{25}{24} \simeq 1.042$$

Invece il *tono temperato*:

$$\sqrt[12]{2} \cdot \sqrt[12]{2} \simeq 1.1224 \tag{3.2}$$

risulta essere molto più vicino al tono maggiore naturale che a quello minore, infatti:

$$\frac{9}{8} = 1.125 \qquad \frac{10}{9} \simeq 1.111$$

Nota	numero MIDI	Rapporto	Frequenza (Hz)	Cent
Do	60	1 : 1	261.6	0
Do# o Reb	61	$\sqrt[12]{2}$	277.2	100
Re	62	$\sqrt[12]{2^2}$	293.7	200
Re# o Mib	63	$\sqrt[12]{2^3}$	311.1	300
Mi	64	$\sqrt[12]{2^4}$	329.6	400
Fa	65	$\sqrt[12]{2^5}$	349.2	500
Fa# o Sol$b$	66	$\sqrt[12]{2^6}$	370.0	600
Sol	67	$\sqrt[12]{2^7}$	390.0	700
Sol# o Lab	68	$\sqrt[12]{2^8}$	415.3	800
La	69	$\sqrt[12]{2^9}$	440.0	900
La# o Sib	70	$\sqrt[12]{2^{10}}$	466.2	1000
Si	71	$\sqrt[12]{2^{11}}$	493.9	1100
Do	72	$\sqrt[12]{2^{12}}$	523.3	1200

Tale sistema, al momento della disputa sulla sua adozione, trovò le critiche sia dei teorici che dei musicisti. Dal punto di vista dei teorici veniva accusato di allontanarsi dalla semplicità dei rapporti di frequenza pitagorici. Dal punto di vista dei musicisti veniva accusato di andare a discapito dell'armonia, alterando la consonanza naturale degli intervalli di quinta, quarta e terza, e d'introdurre un'eccessiva meccanicità facendo perdere i colori particolari propri di ciascuna tonalità.

Malgrado l'apparente semplicità della soluzione, quindi, l'approdo a tale tipo di temperamento fu un processo storicamente complesso e graduale. Il vantaggio del temperamento equabile di modulare divenne un valore solo con l'affermarsi dell'armonia tonale.

3.1.1 Il passaggio al temperamento equabile: il temperamento mesotonico

Uno dei primi passi verso il sistema temperato equabile è stato ad opera di Vincenzo Galilei (1520-1591), padre di Galileo, precursore della musica barocca e discepolo di Zarlino. Egli propose di modificare la scala naturale adottando un tono costante ma razionale, pari a:

$$\frac{18}{17} \simeq 1.058823 \simeq \sqrt[12]{2} \tag{3.3}$$

Agli inizi del '500 fu proposto un altro sistema, noto come *temperamento mesotonico*, che si basava su un unico intervallo di tono pari a $\frac{\sqrt{5}}{2}$ in modo che l'intervallo di terza fosse uguale a quello della scala naturale:

$$\frac{Mi}{Do} = \frac{Re}{Do} \cdot \frac{Mi}{Re} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{5}{4}$$

Mentre nella scala pitagorica il Mi_5, come visto nella (2.28), non corrisponde al quinto armonico del Do_3, quella mesotonica presenta tale corrispondenza che conserva dalla salca naturale. Da esso si ricava l'intervallo di quinta:

$$\sqrt[4]{5} \simeq 1.495 < \frac{3}{2} \tag{3.4}$$

che quindi risulta essere non più "giusta" ma corretta (senza tuttavia comprometterne eccessivamente la consonanza) per far sì che siano le terze maggiori ad avere la loro intonazione naturale. Quindi tale temperamento proponeva di eliminare il *comma sintonico* "distribuendolo" fra i vari gradi della scala.

Tale temperamento si realizza sfruttando il valor medio fra i due toni della scala naturale:

$$\frac{204 + 182}{2} = 193\,\mathrm{cent}$$

Ricordando che l'ottava è composta da 1200 cent:

$$\begin{aligned} & 195 \cdot 5 = 965 \\ 1200 - 965 = 235 \quad \Rightarrow \quad & 235 : 2 = 117.5 \end{aligned}$$

quindi la scala mesotonica è costituita da 5 toni interi tutti di 193 cent e da due semitoni entrambi di 117.5 cent. Ma due semitoni sommati tra loro non danno un tono intero, come nella scala pitagorica. Ciò determina, con alcune ecczioni, una notevole differenza di frequenza fra coppie di note enarmoniche.

La seguente tabella mostra la scala diatonica del temperamento mesotonico:

Grado	Rapporto	Cents
I	1	0
II	$\frac{\sqrt{5}}{2} \simeq 1.118$	193
III	$\frac{5}{4} = 1.25$	386
IV	$2\frac{\sqrt[4]{125}}{5} \simeq 1.337$	503
V	$\sqrt[4]{5} \simeq 1.495$	503
VI	$\frac{\sqrt[4]{5}}{2} \simeq 1.6719$	889.7
VII	$5\frac{\sqrt[4]{125}}{4} \simeq 1.869$	1082.8
VIII	2	1200

La soluzione mesotonica non ebbe però molta fortuna in quanto, pur essendo ”meno irrazionale” dell'equabile (si usano radicali di indice 4 anzichè 12) , non eliminava le differenze tra i due semitoni, ed inoltre resta il comma pitagorico, quindi il circolo delle quinte risulta essere una spirale anche in questo caso.

Nel 1691 Werkmeister trovò un compromesso acustico, da lui stesso ribattezzato *buon temperamento*, componendo 5 quinte mesotoniche e 7 quinte pitagoriche:

$$\sqrt[4]{5} = \frac{\text{Sol}}{\text{Do}} = \frac{\text{Re}}{\text{Sol}} = \frac{\text{La}}{\text{Re}} = \frac{\text{Fa}\#}{\text{Si}}$$
$$\frac{3}{2} = \frac{\text{Si}b}{\text{Mi}b} = \frac{\text{Do}}{\text{Fa}} = \frac{\text{Mi}}{\text{La}} = \frac{\text{Si}}{\text{Mi}} = \frac{\text{Do}\#}{\text{Fa}\#} = \frac{\text{Sol}\#}{\text{Do}\#}$$
$$\sqrt[4]{5} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^7 = 5\sqrt[4]{5}\left(\frac{3}{2}\right)^7 \simeq 127.75 \simeq 128 = 2^7$$

La piccola differenza tra il comma pitagorico e quello sintonico è detta *schisma*, e vale meno di 2 cent.
Una tale approssimazione era impossibile da realizzare con sole quinte pitagoriche o naturali:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \simeq 129.75 > 128 = 2^7$$

o con sole quinte mesotoniche:

$$(\sqrt[4]{5})^{12} = 5^3 = 125 < 128 = 2^7$$

Non si trattava, quindi, di un temperamento equabile rigoroso poiché l'ottava non risultava divisa esattamente in parti uguali, ma fu considerato un buon temperamento.

La svolta che Werckmeister diede alla musica tre secoli fa, prima dell'avvento definitivo del sistema equabile, fu epocale: riuscì a trovare un compromesso tra l'esigenza dei musicisti di intervalli ”giusti' e quella dei matematici di intervalli ”esatti” e irrazionali.

3.2 Confronti fra le diverse scale

Il sistema temperato equabile offre dei vantaggi, rispetto alla scala pitagorica e quella naturale, che sono legati ai motivi che hanno portato alla sua costruzione, cioè:

1. Esiste un unico intervallo di semitono e di tono, quest'ultimo diviso in due semitoni uguali.

2. Il *circolo delle quinte* si chiude dopo 12 passi, pari a 7 ottave. Infatti, mentre con la scala pitagoria e quella naturale:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \neq 2^7 \tag{3.5}$$

nel sistema temperato equabile:

$$(\sqrt[12]{2^7})^{12} = 2^7 \tag{3.6}$$

3. L'intonazione di un brano diventa indipendente dalla tonalità in cui esso è eseguito, quindi può essere traspoto in un'altra tonalità senza dover riaccordare gli strumenti e gli strumenti ad intonazione fissa suonano ugualmente bene in tutte le tonalità.

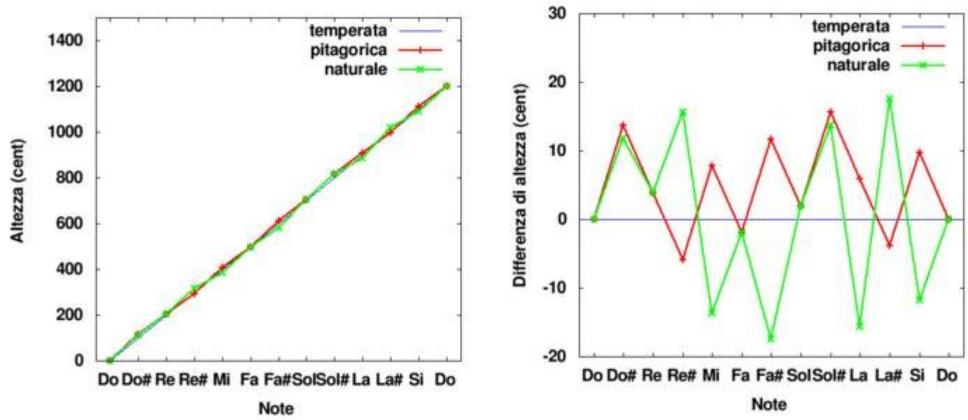
4. Le note enarmoniche vengono a coincidere, semplificando la costruzione degli strumenti musicali, specie degli strumenti a tastiera come il pianoforte.

Il fatto che nel sistema temperato le note enarmoniche vengono a coincidere può anche essere uno svantaggio: mentre nella scala naturale esistevano sempre intervalli perfettamente consonanti, adottando il temperamento equabile questi intervalli non esistono, qualunque sia la tonalità in cui si suona. Dalla tabella[1] seguente possiamo osservare le correzioni rispetto agli intervalli perfettamente consonanti:

Nota	Temperato	Naturale	Pitagorico	Differenza
Do	0.000	0.000	0.000	0.000
Do# o Re b	100.000	111.731	113.685	-11.731
Re	200.000	203.910	203.910	-3.910
Re# o Mi b	300.000	315.641	294.135	-15.641
Mi	400.000	386.314	407.820	+13.686
Fa	500.000	498.045	498.045	+1.955
Fa# o Sol b	600.000	590.224	611.730	+9.776
Sol	700.000	701.955	701.955	-1.955
Sol# o La b	800.000	813.686	815.640	-13.686
La	900.000	884.359	905.865	+15.641
La# o Si b	1000.000	1017.596	996.090	-17.596
Si	1100.000	1088.2689	1109.775	+11.731
Do	1200.000	1200.000	1200.000	0.000

Le differenze sono minime, soprattutto per gli intervalli di quarta giusta (+1.955) e di quinta giusta (-1.955), che sono quelli a fondamento della consonanza. Le differenze principali si trovano per le terze minori che risultano calanti (-15.641) e quelle maggiori che risultano crescenti (+13.686) rispetto alle corrispettive naturali. Lo stesso problema si ha anche per la scala pitagorica, anche se in direzione opposta. Soprattutto per le terze maggiori che costituiscono, nei suoi composti, un armonico con un numero d'ordine relativamente basso (Mi_6 è contemporaneamente il quinto armonico di Do_4 e il quarto armonico di Mi_4), ciò può portare, come già spiegato a proposito della scala pitagorica, al fenomeno dei battimenti. Nella pratica musicale coloro che suonano strumenti ad intonazione variabile (es: archi, fiati) se accompagnati da uno strumento ad intonazione fissa (es: strumenti

[1] La differenza è stata calcolata fra la scala temperata e quella naturale



a tastiera) introducono in tempo reale al momento dell'esecuzione le necessarie correzioni per eliminare i battimenti.

Nei due grafici sottostanti vengono riassunti i valori della scala temperata, pitagorica e naturale: il primo riporta sulla diagonale le altezze delle scale (la scala temperata coincide con la diagonale), nel secondo sono evidenziate le differenze fra le altezze delle note, relativamente alla scala temperata rappresentata dall'asse x.

3.3 Il temperamento Chas

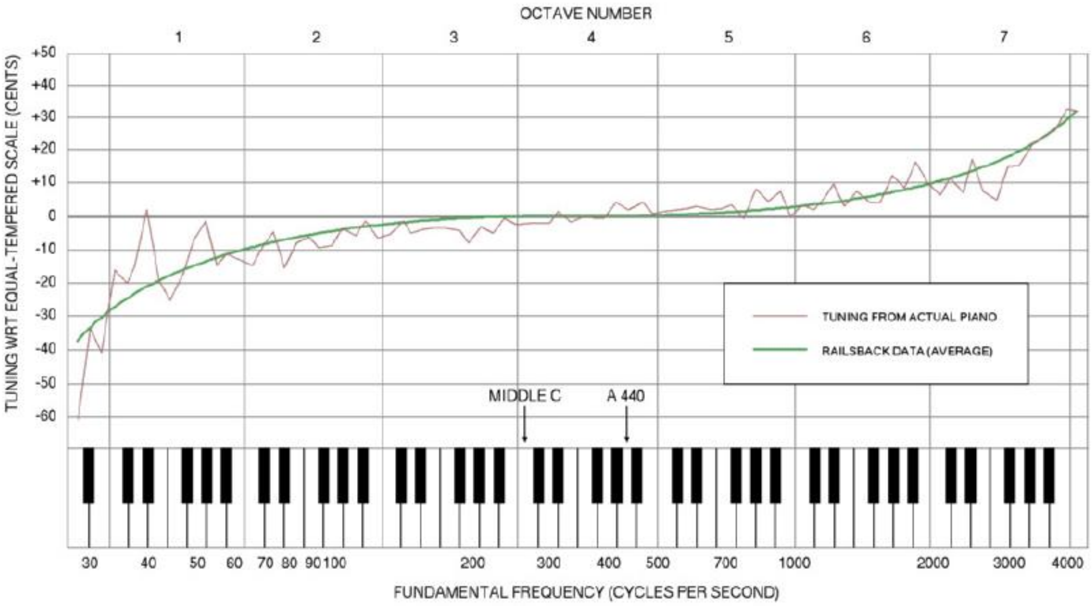
Il metodo classico utilizzato dagli accordatori si basa sul fenomeno dei battimenti (vedi par.1.4). Il loro obiettivo è sempre stato quello di ridurre al minimo i battimenti che venivano fuori dalle approssimazioni innaturali delle note. Dopo una trentennale ricerca, un maestro accordatore di livello nazionale, il messinese Alfredo Capurso, ha proposto un'interessante e rivoluzionaria soluzione al problema, basata su alcune semplici idee.

La prima è quella di non considerare l'intervallo di ottava esattamente a frequenza doppia. In tutti i sistemi musicali esaminati il postulato posto alla base consisteva nel considerare l'intervallo di ottava come rapporto 2:1. Il sistema temperato equabile riesce a risolvere matematicamente i problemi nati con l'avvento del sistema tonale, riuscendo a trovare un compromesso per il rapporto $\frac{5}{4}$ di terza maggiore e il rapporto $\frac{3}{2}$ di quinta giusta, universalmente riconosciuti come quelli di massima consonanza. Ma ciò ha un limite tecnico: approssima tutti gli intervalli tranne che l'ottava. Dal punto di vista degli accordatori il problema era quindi stato risolto accettando le approssimazioni innaturali che facilitavano il loro lavoro, ma non rendevano giustizia al loro orecchio e al mosaico complessivo di tutte le 88 frequenze principali di un pianoforte.

Risultati recenti hanno infatti mostrato l'*inarmonicità* della corda, che consiste in uno scostamento delle frequenze secondarie rispetto ai valori naturali della serie armonica. Il coefficiente di inarmonicità si può calcolare dalla (1.1). Tale concetto è stato portato alla ribalta dagli studi di psicoacustica di H. von Helmholtz, per il quale la consonanza che si avverte tra due suoni è data proprio dal fatto che i battimenti generati da essi e dai rispettivi armonici sono deboli rispetto a quanto accade invece in situazioni di dissonanza.

Quindi Capurso, affermando che per determinare le relazioni tra le note bisogna osservare la sincronia tra essi e i loro battimenti, ha ritenuto necessario ”allargare” il rapporto 2:1 dell’ottava.

O.L. Railsback ha rilevato nel pianoforte la curva media di scostamento del rapporto 2:1:



Questo sistema elabora una ”forma” che scaturisce dal coerente e progressivo incremento dei battimenti prodotti da coppie di suoni. Infatti l’idea di purezza non viene tratta da una singola combinazine o da un ”rapporto puro”, ma da un *insieme-forma*. Quindi le giuste proporzioni non vanno ricercate tra le frequenze entro la prima ottava, ma tra i battimenti espressi da coppie di note con le giuste frequenze. Così il suono stesso avvalora gli ordini di ”Regolarità” e di ”Equilibrio” con le qualità di ”Simmetria”, ”Invertibilità” e ”Specularità”, cioè i requisiti di un sistema scalare armonico. Il sistema così generato viene chiamato *Circular Harmonic System* (C.Ha.S.).

L’altro limite del sistema temperato equabile consiste nella divisione di una singola ottava in 12 semitoni, quindi 13 note, i cui valori vengono riportati nelle altre ottave con ulteriori agiustamenti che scardinano i rapporti tra i suoni fondamentali e le relazioni armoniche dell’insieme completo delle 88 note. Per superare tali limiti il sistema chas considera un intervallo di 2 ottave. A Capurso non bastava fissare una ragione geometrica k (semitono) per ottenere note successive, ma un sistema rivolto a coppie di suoni, così da formare un insieme pluri-direzionale.

Come procedere senza la costante pura 2:1? La risposta viene tratta dall’analisi del rapporto 3:2. Nell’ambito di una singola ottava, esso delimita 7 semitoni come comprendono 8 suoni, e può definire tutti gli intervalli della scala. In una scala il più piccolo scostamento dal rapporto 3:2 avrà un riverbero su tutti gli altri intervalli. Ciò ha indirizzato la ricerca verso una giusta *costante di differenza*. La corretta sincronizzazione dei battimenti, ottenuta tramite sperimentazione diretta ha portato a due nuove coordineate: le *differenze* numeriche dai rapporti aritmetici prodotte dalle combinazioni (di semitoni)

0-19 e 0-24, relative alla terza e la quarta armonica, sono calcolabili in proporzione 1:1.

3.3.1 L'algoritmo Chas

Nella scala semitonale il semitono 12 corrisponde alla seconda armonica, Capurso afferma ciò dicendo *2 è il valore parziale corrispondente al semitono 12.* In modo analogo possiamo dire che 3 è il valore parziale del semitono 19, 4 quello del semitono 24 e 5 è il valore parziale del semitono 28.

La formula (3.1) del temperamente equabile impiega il valore parziale 2 e il relativo valore posizionale 12, quindi la *costante di scala* in tale temperamento è arbitraria e fissa il rapporto 2:1. L'algoritmo Chas si avvale di un'uguagliainza in cui compaiono 2 diversi valori parziali, i 2 relativi valori posizionali e 2 variabili: Δ e s. La formula risolutiva del temperamento armonico è quindi:

$$(3-\Delta)^{\frac{1}{19}} = (4+\Delta)^{\frac{1}{24}} \tag{3.7}$$

Quindi nel temperamento armonico ci sono due costanti, frutto dei battimenti di ogni intervallo.

I valori posizionali determinano il periodo, la grandezza del modulo e dell'intervallo.

La variabile Δ proporziona le *differenze* di due intervalli: $8^{a}+5^{a}$ (XII grado) e $8^{a}+8^{a}$ (XV grado), ossia le combinazioni 0-19 e 0-24. Questi stessi intervalli hanno *differenze costanti* dai rispettivi valori armonici 3 e 4.

Una soluzione dell'equazione chas è:

$$\Delta = 0.0021253899646\ldots \tag{3.8}$$

Sostituendo nella (3.7) il valore della (3.8) otteniamo il *fattore incrementale* delle frequenze di scala:

$$(3-0.0021253899646)^{\frac{1}{19}} = (4+0.0021253899646)^{\frac{1}{24}} \approx 1.0594865443501$$

Il fattore incrementale è la ragione costante di scala, Δ è la ragione di *differenza in proporzione costante 1:1* che "estende" i valori naturali della serie armonica proporzionando tutte le *differenze* relative alle armoniche secondarie.

Introduciamo nella (3.7) la variabile arbitraria s che esprime un potenziale "elastico":

$$(3-\Delta)^{\frac{1}{19}} = (4+s\Delta)^{\frac{1}{24}} \tag{3.9}$$

La variabile s può far oscillare la scala logaritmica dalla ragione 3:2 a 5:4, includendo anche la ragione 2:1 del temperamento equabile. Essa influisce sulle distanze e la proporzione dei valori di scala relativa ai valori parziali 2, 3, 4, 5, sulle distanze e le differenze logaritmiche di tutte le possibili combinazioni armoniche.

Se $s = \frac{s}{s_1}$ la (3.9) diventa:

$$(3-\Delta)^{\frac{1}{19}} = (4 + \frac{s}{s_1}\Delta)^{\frac{1}{24}}$$
$$(3-s_1\Delta)^{\frac{1}{19}} = (4 + s\Delta)^{\frac{1}{24}}$$

e si possono verificare i seguenti casi:

1. s<0 : il valore di scala del 12° semitono non raggiunge il rapporto 2:1;
2. s=0 : il valore di scala del 12° semitono è pari al rapporto 2:1;
3. 0<s<1 : il valore di scala del 12° semitono è in rapporto maggiore di 2:1;
4. s=1 : il valore della scala del 12° semitono è in *rapporto chas* 2.00053127693. . . :1
5. s>1 : il valore della scala del 12° semitono è in rapporto maggiore del rapporto chas.

Quindi ponendo $s = 0$ nella (3.9) si ottiene il semitono del sistema equabile, per $s = 1$ si ottiene il rapporto chas.

Appendice A

La scala logaritmica

Nel paragrafo 1.8.2 abbiamo visto che la scala dell'intensità può essere definita in termini di logaritmi. Anche le scale musicali dell'altezza sono delle scale logaritmiche, e lo sono rispetto alla frequenza della fondamentale dei suoni corrispondenti.

Grazie agli studi sul funzionamento del nostro apparato uditivo, a partire dalla *teoria posizionale* (1863) di Helmohltz, è stato dimostrato che l'ampiezza percepita di un intervallo non si basa sulle differenze delle frequenze fra i due suoni che lo compongono, ma sul loro rapporto. Potremmo quindi dire che il nostro orecchio "conta" in progressione geometrica: data una nota, per ottenerne un'altra basta moltiplicare o dividerne la frequenza per un dato numero a seconda che la nota sia più acuta o più grave. Quindi non percepiamo la differenza tra due frequenze ma la differenza fra i loro logaritmi, ne consegue che la disposizione più naturale delle frequenze è quella in scala logaritmica.

La base b del logaritmo viene scelta in modo che l'ottava abbia larghezza unitaria:

$$\log_b(2\nu : \nu) = \log_b 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 2 \tag{A.1}$$

Quindi per il rapporto costante di semitono:

$$\log_2 \sqrt[12]{2} = \frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad 12 \log_2 \sqrt[12]{2} = log_2 2 = 1 \tag{A.2}$$

di conseguenza in un'ottava si hanno 12 semitoni.

Usando i logaritmi, Eulero[1] notò come sia possibile determinare quanti semitoni distinti tra due note le cui frequenze abbiano un rapporto $R = \frac{N_2}{N_1}$:

[1] Così come tanti altri matematici, anche Eulero mostrò interesse nei confronti della teoria musicale, ne sono un esempio: *Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae* (1739), *Exposition de quelques nouvelles vues mathématiques dans la théorie de la musique* (1760), *Conjecture de la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique* (1764), *Tentamen de sono campanarum* (1764) e *De harmoniae veris principiis perspeculum musicum repraesentatis* (1774).

$$\left(\sqrt[12]{2}\right)^n = R \quad \Rightarrow \quad n = \log_{\sqrt[12]{2}} R = \frac{\log_2 R}{\log_2 \sqrt[12]{2}}$$
$$\Rightarrow \quad n = 12 \log_2 R \tag{A.3}$$

dove $n \in \mathbb{N}$ se le note appartengono al temperamento equabile in quanto R è una potenza intera di $\sqrt[12]{2}$, in caso contrario $n \notin \mathbb{N}$.

Quindi il logaritmo (in base 2) di un intervallo musicale, considerato entro la scala temperata equabile, ci permette di determinare il numero di semitoni di cui esso è composto.

Ad esempio, per la quinta equabile si ha:

$$R = \sqrt[12]{2^7} \quad \Rightarrow \quad n = 12 \log_2 R = 12 \cdot \frac{7}{12} = 7 \tag{A.4}$$

Un sistema molto usato per misurare rapporti di frequenza è quello dei *centesimi*, introdotto intorno al 1875 dal matematico inglese Alexander Ellis (1814-1890). La formula per esprimere un qualsiasi intervallo $R = \frac{N_2}{N_1}$ tra due note in *cent* è la seguente:

$$n = 1200 \log_2 R \tag{A.5}$$

In questo modo il semitono equabile, il tono equabile, la quinta $R = 3 : 2$ e l'ottava $R = 2 : 1$ corrispondono rispettivamente a:

$$1200 \cdot \log_2 \sqrt[12]{2} = 100\, cent \tag{A.6}$$
$$1200 \cdot \log_2 \sqrt[6]{2} = 200\, cent \tag{A.7}$$
$$1200 \cdot \log_2 \left(\frac{3}{2}\right) = 701.955\, cent \tag{A.8}$$
$$1200 \cdot \log_2 2 = 1200\, cent \tag{A.9}$$

Viceversa, un intervallo di n centesimi corrisponde ad un rapporto di frequenze pari a:

$$R = 2^{\frac{n}{1200}} : 1 \tag{A.10}$$

Sfruttando i centesimi le distanze fra note successive non risultano più essere espresse dai rapporti tra le frequenze ma dalle loro *differenze* in cent:

$$1200 \log_2 N_1 N_2 = 1200(\log_2 N_2 - \log_2 N_1) = n_2 - n_1 \tag{A.11}$$

Bibliografia

[1] AA. VV., Enciclopedia della musica, *Le Garzantine*, Garzanti libri, gennaio 1999.

[2] AA. VV., *Dizionario Enciclopedico della Musica e dei Musicisti*, Torino, Utet.

[3] Apreda, *Fondamenti teorici dell'arte musicale moderna*, Milano, Casa Ricordi, 1999.

[4] C.Ha.S: Circular Harmonic System, (`http://www.chas.it/`).

[5] N. Chiriano,*Pitagora e la Musica*, Alice & Bob, Centro Pristem Un. Bocconi (`http://matematica.unibocconi.it/articoli/pitagora-e-la-musica`) - n. 15, dicembre 2009.

[6] N. Chiriano, *Il restauro della Scala. Il "temperino" di J.S. Bach*, Alice & Bob, Centro Pristem Un. Bocconi - n. 16, febbraio 2010.

[7] N. Chiriano, *Relazioni armoniche in un pianoforte. Analisi del temperamento C.Ha.S.®* , sito MatePristem Un. Bocconi (`http://matematica.unibocconi.it/articoli/relazioni-armoniche-un-pianoforte`), novembre 2010.

[8] N. Chiriano, *A ritmo di log. G.W. Leibniz e i "numeri dei rapporti"*, Alice & Bob, Centro Pristem Un. Bocconi - n. 17-18, mar-giu 2010.

[9] Fisica Onde Musica, (`http://fisicaondemusica.unimore.it/`).

[10] S. Isola, *Temperamenti: matematica e teoria musicale*, (`http://www.unicam.it/`).

[11] C.D. Pagani, S.Salsa, *Analisi matematica* vol. 2, Bologna, Zanichelli, 2007.

[12] Walter Piston, *Armonia*, Torino, E.D.T. (I Manuali (EDT/SIdM)), 1989.

[13] R. Resnick, D. Halliday, *Fisica I*, Milano, Casa Editrice Ambrosiana, 1970.