

Soluzioni prova scritta del 20/9/2022

Studio di funzione. La funzione è definita solo per $x \leq 0$ e $x > 4$ ed è sempre positiva. Presenta un minimo in $m(6, (108)^{1/4})$, un punto d'intersezione nell'origine che è anche un punto a tg verticale, un asintoto verticale destro per $x=4$ e tende a $+\infty$ per $x \rightarrow \pm \infty$.

Serie. La serie, da studiare tramite assoluta convergenza è convergente assolutamente e semplicemente per $x < e^2/[2(e^2+1)]$ e $x > e^2/[2(e^2-1)]$. Nel primo estremo dell'intervallo di convergenza è convergente semplicemente perché asintotica a una serie armonica con $\alpha=2$ e nel secondo estremo converge semplicemente per il criterio di Leibniz.

Successione. Utilizzando il limite notevole della tangente, dopo aver razionalizzato l'argomento, tutto si riduce a studiare la successione $(-1)^n n^{[(x^2-2x-4)/(x+2)]}$ che è convergente a 0 per $x < -2$ e $1-(5)^{1/2} < x < 1+(5)^{1/2}$, oscilla tra $\pm 1/4$ per $x=1-(5)^{1/2}$ e $x=1+(5)^{1/2}$, indeterminata e illimitata altrove.

Integrale generalizzato. Dopo aver usato la sostituzione classica $e^x=t$ si perviene a una funzione razionale fratta, da scomporre in fratti semplici. La primitiva è nell'immagine allegata. Trattandosi di un integrale generalizzato occorre valutare tale primitiva in $x=0$ e in $x=c$ e poi fare il limite per $c \rightarrow \infty$. Il risultato numerico (l'integrale quindi è convergente) è $1+5\ln(2)-4\ln(3)$.



$$-4 \ln(e^x + 2) + \ln(e^x + 1) + e^x + C$$