

Soluzioni prova scritta del 16/7/2025

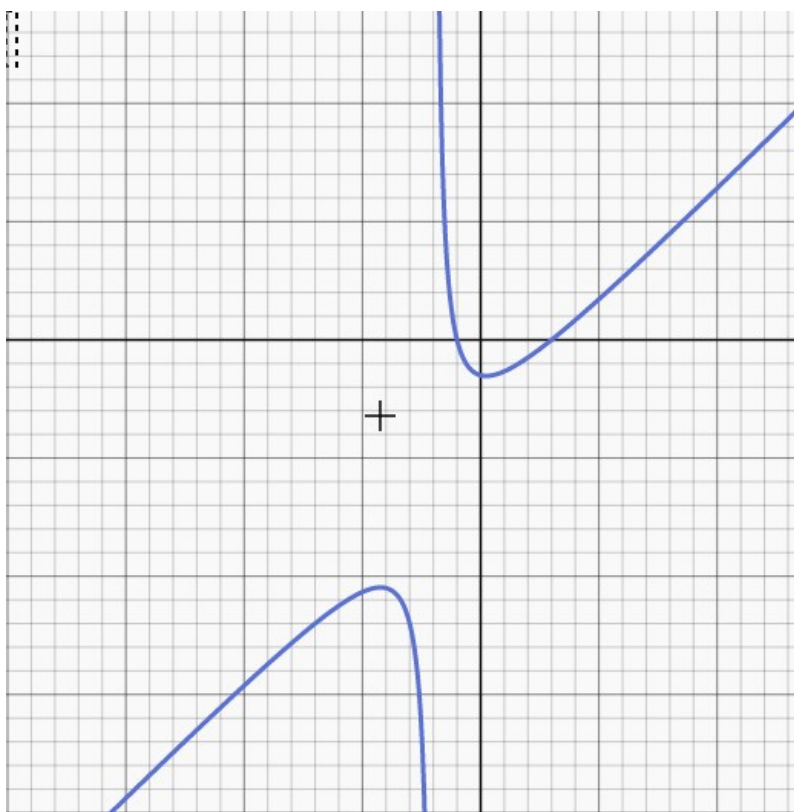
1) La funzione, definita in $\mathbb{R} \setminus (-2)$ presenta punti d'intersezione in $(3,0)$, $(-1,0)$ e $(0,-3/2)$. Asintoto obliquo $y=x-4$, asintoto verticale $x=-2$, max in $x=-2-(5)^{1/2}$ e min in $x=-2+(5)^{1/2}$. Non ha flessi, è però concava prima di $x=-2$ e convessa dopo $x=-2$. Il grafico è allegato.

2) La serie è di tipo geometrico e converge, sia assolutamente che semplicemente, per $x>0$. E' indeterminata per $x=0$. La somma per $x=1$ si può calcolare perché il valore rientra nel campo di convergenza. E' sufficiente pertanto usare la formula della somma di una serie geometrica: $S=1/(1-q)$ e il risultato è $S=(e^2+1)/4$

3) La successione presenta il solo limite notevole del $\sin(x)$ (basta approssimare $\sin^3(x)$ con x^3) e poi il limite notevole $(1-1/a_n)^{a_n}$ (quello che dà $1/e$). Essendo $1/e$ tutto elevato a $1/n$, alla fine il risultato è 1.

L'altro fattore si approssima, dopo razionalizzazione, a $n^{-3/2}$. In definitiva, $a_n(x)$ converge a 0 per $x<-3$ e $x>-1$, è costantemente $a_n(x) = 1$ per $x=-3$ e diverge altrove.

4) L'integranda, dopo sostituzione $e^x=t$, diventa una funzione razionale fratta con denominatore $t(t^2+1)$ che si può scomporre in fratti semplici (caso: radice reale semplice, radice complessa semplice) con $A/t + (Bt+C)/(t^2+1)$. La primitiva è allegata.



$$2 \ln(e^{2x} + 1) - 2 \arctan(e^x) - 3x + C$$