

Soluzioni prova scritta del 13/7/2023

1. La funzione presenta un punto d'intersezione con gli assi coordinati in $(0,1)$, asintoto orizzontale destro $y=2/3$ e sinistro $y=2$, asintoto verticale in $x=-\ln(3)$ (o $\ln(1/3)$, se preferite) un punto angoloso in $(-\ln(2), 2)$). Il grafico è allegato.
2. La serie è geometrica (pochi studenti se ne sono accorti!!!), pertanto converge semplicemente ed assolutamente per $x < -\ln(5)$ e $x > 0$, è indeterminata per $x = -\ln(5)$ e divergente a $+\infty$ per $x=0$. La somma per $x=1$ è $S=(3e-1)/(e-1)$ mentre per $x=-1$ non ha somma perché -1 non appartiene all'intervallo di convergenza.
3. La successione presenta il limite notevole di $1-\cos(1/n)$, che si approssima dunque con $(1/2n^2)$ mentre l'altro fattore tende a zero come $1/n$. Pertanto converge a zero per $x < -(6)^{(1/2)}/2$, $-1 < x < 1$ e $x > (6)^{(1/2)}/2$, oscilla tra $\pm 1/2$ per $x = \pm (6)^{(1/2)}/2$ ed è indeterminata illimitata altrove.
4. L'integrale, da studiare con la sostituzione $e^x=t$ e poi decomporre in fratti semplici, ha la primitiva come da allegato. Questa, calcolata tra gli estremi e passando al limite, tende a $+\infty$, pertanto l'integrale è divergente. Si osservi che l'integrale rappresenta una porzione di area della funzione da studiare al punto 1), compresa tra le rette verticali $x=-\ln 3$ e $x=-\ln 2$



$$\frac{4 \ln(|3e^x - 1|)}{3} - 2x + C$$