

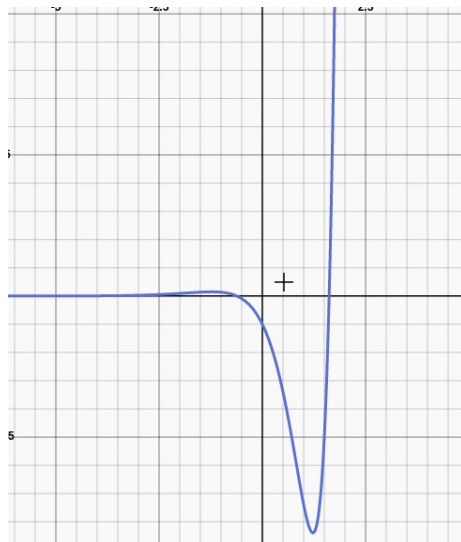
Soluzioni della prova del 13/1/2025

1) La $f(x)$ ha tre punti d'intersezione con gli assi coordinati: $P(0,-1)$, $Q((1-5^{1/2})/2, 0)$, $R((1+5^{1/2})/2, 0)$, un max in $x=-[6^{1/2}]/2$ e un minimo in $x=[6^{1/2}]/2$, un flesso in $x=[-1-7^{1/2}]/2$ e in $x=[-1+7^{1/2}]/2$, entrambi a tg. obliqua, un asintoto orizzontale sinistra in $x=0$.

2) La serie, da studiare tramite convergenza assoluta, converge assolutamente e semplicemente per $1/e < x < e$, converge per Leibniz in $x=1/e$ e diverge per confronto asintotico con la serie armonica in $x=e$.

3) Nella successione sono presenti due limiti notevoli: il $\ln[(n^2+n)/(n^2+2)]$ lo si può scrivere (aggiungendo e sottraendo 2 a numeratore) come $\ln[1+(n-2)/(n^2+2)]$ che è asintotico a $\ln(1+1/n)$ che a sua volta è asintotico a $1/n$. Il secondo fattore è asintotico anch'esso a $1/n$ grazie al limite notevole di $(e^x-1)/x$. La successione pertanto è indeterminata e limitata tra ± 1 per $x=\pm (3)^{1/2}$, indeterminata ma illimitata per $-(3)^{1/2} < x < -1$ e $1 < x < (3)^{1/2}$ e converge a 0 altrove.

4) L'integrale, da affrontare con la classica sostituzione $e^x=t$ si poteva svolgere per parti, trasformandosi in una somma di tre integrali immediati (tramite una divisione tra polinomi). La primitiva è allegata sotto.



$$\frac{e^{4x} \ln(1 - e^{-x})}{4} - \frac{\ln(|e^x - 1|) + \frac{2e^{3x} + 3e^{2x} + 6e^x}{6}}{4} + C$$