

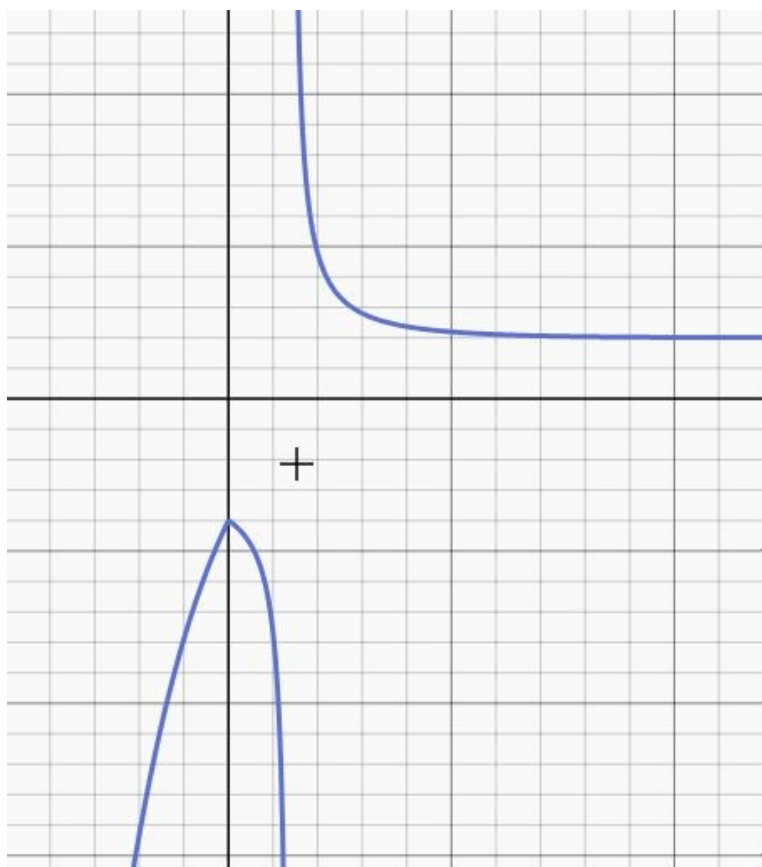
Soluzioni prova scritta del 14/2/2025

1) La funzione, da suddividere in tre porzioni [$x < 0$; $0 < x < \ln(2)$ e $x > \ln(2)$ tramite lo studio del segno delle quantità presenti all'interno dei valori assoluti], ha un asintoto orizzontale destro per $y=1$, mentre tende a $-\infty$ per $x \rightarrow -\infty$, ha un asintoto verticale completo in $x=\ln(2)$, un punto angoloso in $P(0,-2)$ dove le tangenti a $f(x)$ hanno pendenza $m=3$ e $m=-1$, è concava per $x < \ln(2)$ e convessa per $x > \ln(2)$. Vedere grafico allegato.

2) La serie è a termini non negativi, pertanto si può studiare da subito con un criterio tipo radice o rapporto. Non è necessaria la convergenza assoluta, che ovviamente coincide, in questo caso, con quella semplice. Converge dunque per $1/e < x < e$, mentre diverge per confronto asintotico con la serie armonica per $x=1/e$ e $x=e$. Per calcolare la somma per $x=1$ basta osservare che $\ln(1) = 0$ quindi la serie è una somma di zeri, e converge a 0.

3) La successione si risolve osservando che, dopo razionalizzazione della differenza tra radici, si può sfruttare il limite notevole del numero di Eulero, basta mettere a esponente (e poi dividere per esso) per la quantità $n^{3/2}$, che poi andrà a combinarsi con n^{x^2} . La discussione sulla convergenza pertanto si fa sul polinomio $x^2 - 3/2$. Quindi la successione è indeterminata e limitata tra $+/-e^{3/2}$ per $x \rightarrow 0$ $+/-[6^{(1/2)}]/2$, è indeterminata ma illimitata per $x < -[6^{(1/2)}]/2$ e $x > [6^{(1/2)}]/2$ indeterminata e limitata tra $+/-1$ altrove.

4) L'integrale, da fare subito per parti, senza sostituzioni!!!!, è un integrale ricorsivo (a secondo membro ricompare l'integrale da calcolare, moltiplicato per $1/9$). Pertanto la soluzione si trova portando a primo membro $1/9 I$ e sommandolo a I . Il risultato è allegato. Calcolando negli estremi $(c,0)$ e facendo il limite per $c \rightarrow -\infty$ il risultato finale è $3/10$, pertanto l'integrale è convergente.



$$\frac{e^{3x} (\sin(x) + 3 \cos(x))}{10} + C$$