

Soluzioni prova scritta del 23/2/2023

La funzione ha punti d'intersezione in $(0, 1/2)$, $((5)^{1/2}-1)/2, 0)$, $((1-(5)^{1/2}))/2, 0)$, un asintoto verticale in $x=2$ e due asintoti obliqui $y=x+3$ e $y=-x-3$. Ha un minimo relativo in $x=2+(5)^{1/2}$, due punti angolosi in $(1,1)$ e $(-1,-1/3)$.

La serie è convergente assolutamente e semplicemente per $\ln(4/3) < x < \ln(2)$ e per $x=\ln(2)$ converge semplicemente per il criterio di Leibniz, per $x=\ln(4/3)$ diverge per il confronto asintotico con la serie armonica.

Nella successione il secondo fattore va scomposto come differenza tra cubi (a^3-b^3), per ricavare $(1-\cos(1/n))(1+\cos(1/n)+\cos^2(1/n))$ che si può approssimare con $3/(2n^2)$ grazie al limite notevole del $\cos(1/n)$. Il terzo fattore tende a 1. La successione è pertanto convergente a zero per $x>1$ e per $-1-(3)^{1/2} < x < (3)^{1/2}-1$, indeterminata tra $\pm 3/2$ per $x=-1-(3)^{1/2}$ e $x=(3)^{1/2}-1$, indeterminata tra $\pm\infty$ altrove.

L'integrale, dopo sostituzione con $\ln(x)=t$ diventa quello di una funzione razionale fratta, da dividere in fratti semplici. La primitiva è in foto. Ovviamente l'integrale è divergente in $x=e$.

