Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Scienze
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Generalizzazione del Problema di Basilea

Relatore
Prof. Lucio Cadeddu

Candidata
Lorella Cannas

A. A. 2012/2013

Alcune definizioni per iniziare

Un ***numero figurato*** è un numero naturale che può essere rappresentato mediante una disposizione geometrica e regolare di punti equidistanti.

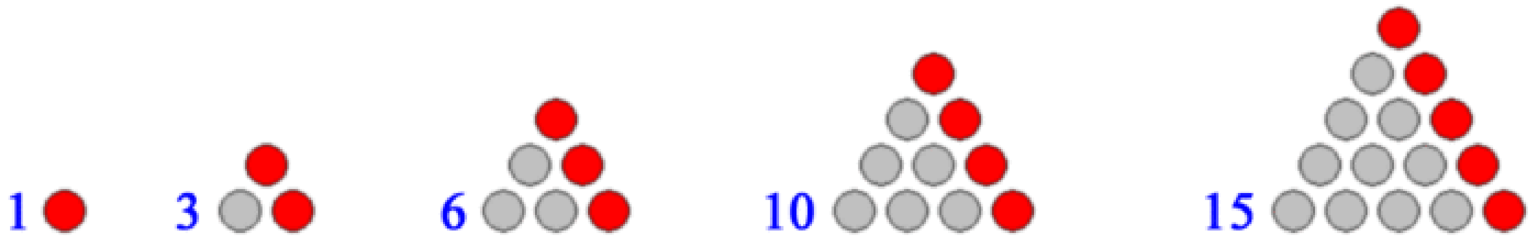
Un ***numero poligonale*** è un numero figurato la cui rappresentazione geometrica avviene attraverso un poligono regolare.

Esempi

Numeri triangolari:

L’n-esimo numero triangolare si trova sommando tra loro i primi n numeri naturali, in formule sarebbe

$$T_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

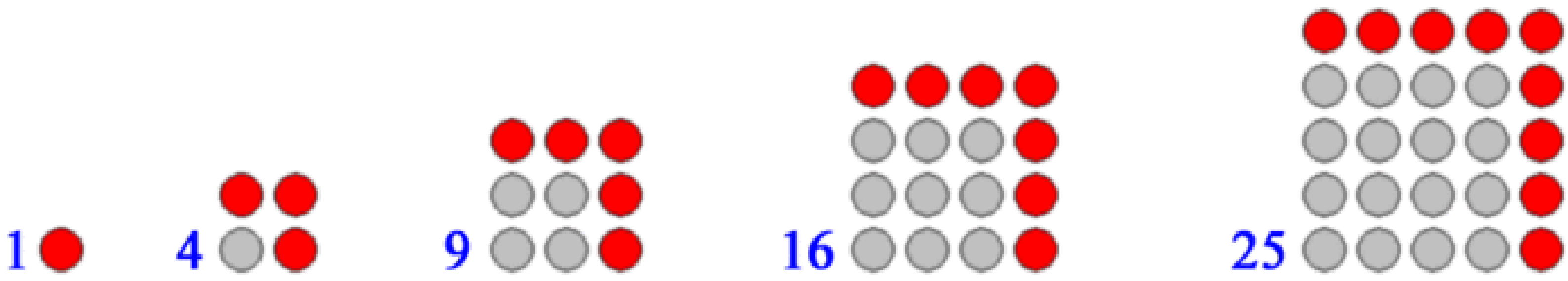


Esempi

Numeri quadrati:

L'n-esimo numero quadrato si trova sommando tra loro i primi n numeri dispari, in formule si ha

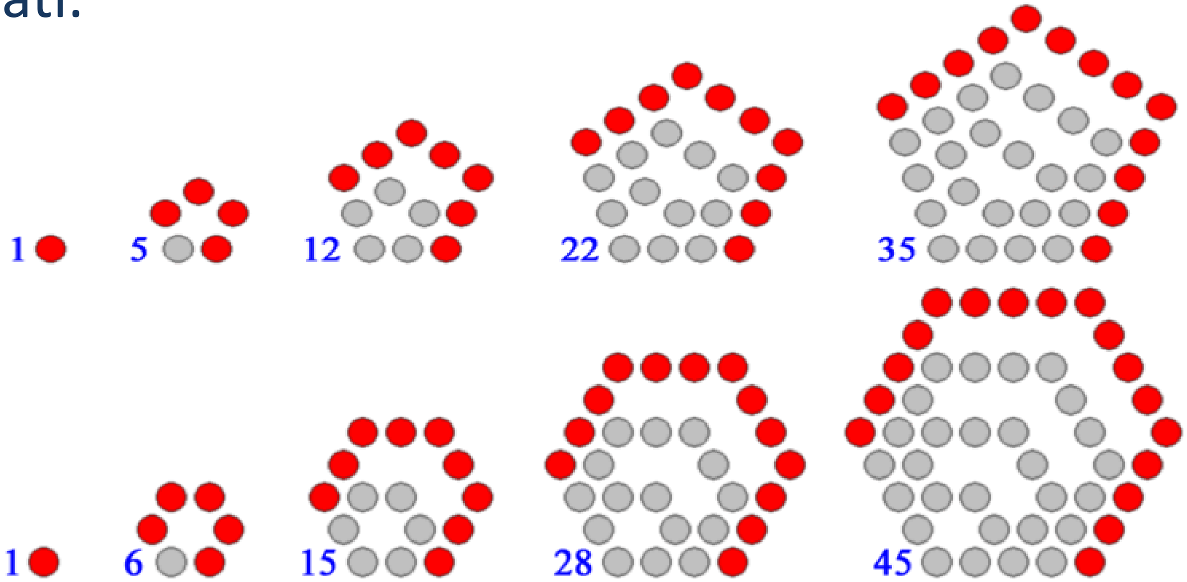
$$Q_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$



Esempi

Numeri poligonali successivi a quelli quadrati:

I numeri poligonali successivi si ottengono prolungando di un punto due lati consecutivi del poligono e aggiungendo poi i restanti lati.



Obbiettivo

La generica espressione di un numero poligonale è

$$\frac{(a-2)n^2-(a-4)n}{2}$$

a è il numero dei lati del poligono che lo rappresenta.

L’obbiettivo della tesi è quello di trovare la somma delle serie che hanno come termine generico l’inverso di un numero poligonale, in formule

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(a-2)n^2-(a-4)n}=?$$

Serie di Mengoli

Considerando i numeri triangolari, $a = 3$, il problema si riconduce alla Serie di Mengoli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(a-2)n^2 - (a-4)n} \quad \overset{a=3}{\Longrightarrow} \quad 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 2$$

Somma della serie di Mengoli:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} 1 - \frac{1}{k+1} = 1$$

Problema di Basilea

Considerando i numeri quadrati, $a = 4$, il problema è noto come Problema di Basilea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(a-2)n^2-(a-4)n} \overset{a=4}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Dimostrazione (Eulero, 1735):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \Rightarrow \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

$$\frac{\sin x}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

Problema di Basilea

Ponendo $z = x^2 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{z}$ si ha $\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = 1 - \dfrac{z}{3!} + \dfrac{z^2}{5!} - \dfrac{z^3}{7!} + \cdots$

$$\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = 0 \;\Rightarrow\; z = k^2\pi^2, \quad k = 1,2,3, \ldots$$

Formule di Viète: dato il polinomio $a_n x^n + \cdots + a_1 x + 1$

avente radici $x_1, \ldots, x_n$ si ha che

$$x_1^{-1} + \cdots + x_n^{-1} = -a_1$$

Problema di Basilea

Applicando queste formule si ottiene la seguente conclusione

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Curiosità sulle serie armoniche generalizzate

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

- Convergenza per $p > 1$
- Divergenza per $p \leq 1$

Curiosità sulle serie armoniche generalizzate

Per p pari la somma della serie è stata trovata da Eulero fino al caso $p = 26$

p	Valore di convergenza
2	$\frac{\pi^2}{6}$
4	$\frac{\pi^4}{90}$
6	$\frac{\pi^6}{945}$
...	...

Curiosità sulle serie armoniche generalizzate

Per p dispari il problema è ancora irrisolto.
I valori delle somme delle varie serie sono solo approssimati.

Solo nel 1978 Roger Apéry riuscì a provare che il valore di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

è un numero irrazionale.

Risoluzione problema

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(a-2)n^2-(a-4)n} = ?$$

- $S_a \coloneqq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(a-2)n^2-(a-4)n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{(a-2)n-(a-4)} x^{(a-2)n-(a-4)}\Big|_{x=1}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{x^{(a-2)n-(a-4)}}{(a-2)n-(a-4)} = -\int \frac{1}{x^{a-3}} \ln(1-x^{a-2})\, dx$

Ottenendo:

$$S_a = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{x^{(a-2)n-(a-4)}}{(a-2)n-(a-4)} = -2\int_0^1 \frac{1}{x^{a-3}} \ln(1-x^{a-2})\, dx$$

Risoluzione problema

Integrando per parti si ottiene

$$\int \frac{1}{x^{a-3}} \ln(1 - x^{a-2})\, dx = -\frac{\ln(1 - x^{a-2})}{(a-4)x^{a-4}} - \frac{a-2}{a-4} \int \frac{x}{1 - x^{a-2}}\, dx$$

- $a = 2k + 2$
- $a = 2k + 1$

Risoluzione problema: caso pari

Grazie alla formula

$$\int \frac{x^{p-1}}{x^{2k}-a^{2k}}\,dx = \frac{1}{2ka^{2k-p}}\sum_{j=1}^{k-1}\cos\left(\frac{jp\pi}{k}\right)\ln\left(x^2-2ax\cos\left(\frac{j\pi}{k}\right)+a^2\right)$$
$$-\frac{1}{ka^{2k-p}}\sum_{j=1}^{k-1}\sin\left(\frac{jp\pi}{k}\right)\tan^{-1}\left(\frac{x-a\cos\left(\frac{j\pi}{k}\right)}{a\sin\left(\frac{j\pi}{k}\right)}\right)$$
$$+\frac{1}{2ka^{2k-p}}\left[\ln(x-a)+(-1)^p\ln(x+a)\right]+C$$

con $\quad 0 < p \leq 2k$

Risoluzione problema: caso pari

La soluzione dell'integrale è

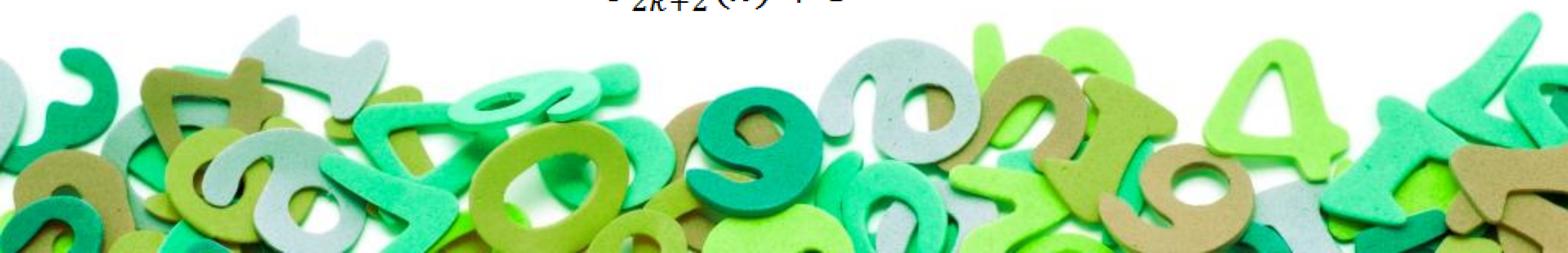
$$\int \frac{1}{x^{a-3}} \ln(1-x^{a-2})\, dx = -\frac{\ln(1-x^{2k})}{(2k-2)x^{2k-2}} - \frac{2k}{2k-2}\int \frac{x}{1-x^{2k}}\, dx$$

$$= -\frac{\ln(1-x^{2k})}{(2k-2)x^{2k-2}} + \frac{1}{2k-2}\ln(1-x^2)$$

$$+\frac{1}{2k-2}\sum_{j=1}^{k-1} \cos\left(\frac{2j\pi}{k}\right) \ln\left[x^2 - 2x\cos\left(\frac{j\pi}{k}\right) + 1\right]$$

$$-\frac{2}{2k-2}\sum_{j=1}^{k-1} \sin\left(\frac{2j\pi}{k}\right) \tan^{-1}\left(\frac{x-\cos\left(\frac{j\pi}{k}\right)}{\sin\left(\frac{j\pi}{k}\right)}\right) + C$$

$$= F_{2k+2}(x) + C$$



Risoluzione problema: caso pari

$$S_{2k+2} = -2\left(\lim_{x\to 1^-} F_{2k+2}(x) - \lim_{x\to 0^+} F_{2k+2}(x)\right)$$

$$\lim_{x\to 1^-} F_{2k+2}(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(-\frac{\ln(1-x^{2k})}{(2k-2)x^{2k-2}} + \frac{1}{2k-2}\ln(1-x^2)\right)$$

$$+\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{2k-2}\sum_{j=1}^{k-1}\cos\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\ln\left[x^2 - 2x\cos\left(\frac{j\pi}{k}\right)+1\right]\right.$$

$$\left.-\frac{2}{2k-2}\sum_{j=1}^{k-1}\sin\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\tan^{-1}\left(\frac{x-\cos\left(\frac{j\pi}{k}\right)}{\sin\left(\frac{j\pi}{k}\right)}\right)\right)$$

Risoluzione problema: caso pari

Applicando più volte la regola di de l'Hôpital si ottiene

$$\lim_{x\to 1^-}\left(-\frac{\ln(1-x^{2k})}{(2k-2)x^{2k-2}}+\frac{\ln(1-x^2)}{2k-2}\right)=-\frac{\ln(k)}{2k-2}$$

Mentre con un semplice calcolo diretto si ottiene

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{2k-2}\sum_{j=1}^{k-1}\cos\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\ln\left[x^2-2x\cos\left(\frac{j\pi}{k}\right)+1\right]-\frac{2}{2k-2}\sum_{j=1}^{k-1}\sin\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\tan^{-1}\left(\frac{x-\cos\left(\frac{j\pi}{k}\right)}{\sin\left(\frac{j\pi}{k}\right)}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2k-2}\sum_{j=1}^{k-1}\cos\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\ln\left[1-2\cos\left(\frac{j\pi}{k}\right)+1\right]-\frac{2}{2k-2}\sum_{j=1}^{k-1}\sin\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\left(\frac{j\pi}{k}\right)}{\sin\left(\frac{j\pi}{k}\right)}\right)$$

Risoluzione problema: caso pari

$$\lim_{x\to 0^+} F_{2k+2}(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{\ln(1-x^{2k})}{(2k-2)x^{2k-2}}\right)$$

$$+\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2k-2}\sum_{j=1}^{k-1}\cos\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\ln\left[x^2-2x\cos\left(\frac{j\pi}{k}\right)+1\right]\right.$$

$$+\frac{1}{2k-2}\ln(1-x^2)$$

$$\left.-\frac{2}{2k-2}\sum_{j=1}^{k-1}\sin\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\tan^{-1}\left(\frac{x-\cos\left(\frac{j\pi}{k}\right)}{\sin\left(\frac{j\pi}{k}\right)}\right)\right)$$

Risoluzione problema: caso pari

Applicando più volte la regola di de l'Hôpital si ottiene:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{\ln(1-x^{2k})}{(2k-2)x^{2k-2}}\right)=0$$

Mentre con un semplice calcolo diretto si ottiene:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2k-2}\sum_{j=1}^{k-1}\cos\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\ln\left[x^2-2x\cos\left(\frac{j\pi}{k}\right)+1\right]\right.$$
$$\left.-\frac{2}{2k-2}\sum_{j=1}^{k-1}\sin\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\tan^{-1}\left(\frac{x-\cos\left(\frac{j\pi}{k}\right)}{\sin\left(\frac{j\pi}{k}\right)}\right)+\frac{1}{2k-2}\ln(1-x^2)\right)$$
$$=-\frac{2}{2k-2}\sum_{j=1}^{k-1}\sin\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\tan^{-1}\left(\frac{-\cos\left(\frac{j\pi}{k}\right)}{\sin\left(\frac{j\pi}{k}\right)}\right)$$

Risoluzione problema: caso pari

Mettendo assieme i precedenti risultati si ottiene la seguente formula finale:

$$S_{2k+2} = -\frac{1}{k-1}\left[-\ln(k) + \sum_{j=1}^{k-1} \cos\left(\frac{2j\pi}{k}\right) \ln\left[2 - 2\cos\left(\frac{j\pi}{k}\right)\right]\right.$$

$$\left. -2\sum_{j=1}^{k-1} \sin\left(\frac{2j\pi}{k}\right) \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\left(\frac{j\pi}{k}\right)}{\sin\left(\frac{j\pi}{k}\right)}\right) + 2\sum_{j=1}^{k-1} \sin\left(\frac{2j\pi}{k}\right)\left(\frac{\pi}{2} + \frac{j\pi}{k}\right)\right]$$

Esempio

Al variare di a si ottiene la seguente tabella

Numero dei lati del poligono	Serie ottenuta	Valore della somma
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$	$2\ln 2$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3n-2)}$	$\frac{3\ln 3}{4} + \frac{\sqrt{3}\pi}{12}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n-3)}$	$\ln 2 + \frac{\pi}{6}$
14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(6n-5)}$	$\frac{2\ln 2}{5} + \frac{3\ln 3}{10} + \frac{\sqrt{3}\pi}{10}$

Risoluzione problema: caso dispari

Grazie alla formula

$$\int \frac{x^{p-1}}{x^{2m+1}-a^{2m+1}}\,dx = \frac{\ln(x-a)}{(2m+1)a^{2m-p+1}}$$
$$-\frac{2}{(2m+1)a^{2m-p+1}}\sum_{j=1}^{m}\sin\left(\frac{2jp\pi}{2m+1}\right)\tan^{-1}\left(\frac{x-a\cos\left(\frac{2j\pi}{2m+1}\right)}{a\sin\left(\frac{2j\pi}{2m+1}\right)}\right)$$
$$+\frac{1}{(2m+1)a^{2m-p+1}}\sum_{j=1}^{m}\cos\left(\frac{2jp\pi}{2m+1}\right)\ln\left(x^2-2ax\cos\left(\frac{2j\pi}{2m+1}\right)+a^2\right)+C$$

con $0 < p \leq 2m+1$

Risoluzione problema: caso dispari

Si ottiene

$$\int \frac{1}{x^{a-3}} \ln(1-x^{a-2})\,dx = -\frac{\ln(1-x^{2k-1})}{(2k-3)x^{2k-3}} - \frac{2k-1}{2k-3}\int \frac{x}{1-x^{2k-1}}\,dx$$

$$= -\frac{\ln(1-x^{2k-1})}{(2k-3)x^{2k-3}} + \frac{1}{2k-3}\ln(1-x)$$

$$-\frac{2}{2k-3}\sum_{j=1}^{k-1} \sin\left(\frac{4j\pi}{2k-1}\right)\tan^{-1}\left(\frac{x-\cos\left(\frac{2j\pi}{2k-1}\right)}{\sin\left(\frac{2j\pi}{2k-1}\right)}\right)$$

$$+\frac{1}{2k-3}\sum_{j=1}^{k-1} \cos\left(\frac{4j\pi}{2k-1}\right)\ln\left(x^2-2x\cos\left(\frac{2j\pi}{2k-1}\right)+1\right)+C$$

$$= F_{2k+1}(x) + C$$

Risoluzione problema: caso dispari

La formula finale per la somma della serie è

$$S_{2k+1} = -\frac{2}{2k-3}\left[-\ln(2k-1) - 2\sum_{j=1}^{k-1}\sin\left(\frac{4j\pi}{2k-1}\right)\tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\left(\frac{2j\pi}{2k-1}\right)}{\sin\left(\frac{2j\pi}{2k-1}\right)}\right)\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{k-1}\cos\left(\frac{4j\pi}{2k-1}\right)\ln\left(2-2\cos\left(\frac{2j\pi}{2k-1}\right)\right) + 2\sum_{j=1}^{k-1}\sin\left(\frac{4j\pi}{2k-1}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2j\pi}{2k-1}\right)\right]$$

Esempio

Numero dei lati del poligono	Serie ottenuta	Valore della somma
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(3n-1)}$	$3\ln 3 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(5n-3)}$	$-\frac{1}{3}\Big[-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right) + \sqrt{10+2\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\right) - 2\ln 5 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\ln\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\ln\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{9\pi}{10}\sqrt{10-2\sqrt{5}} - \frac{13\pi}{10}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\Big]$

Grazie per l'attenzione