Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Scienze
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di laurea

Sui numeri figurati

Relatore

Prof. Lucio Cadeddu

Candidato

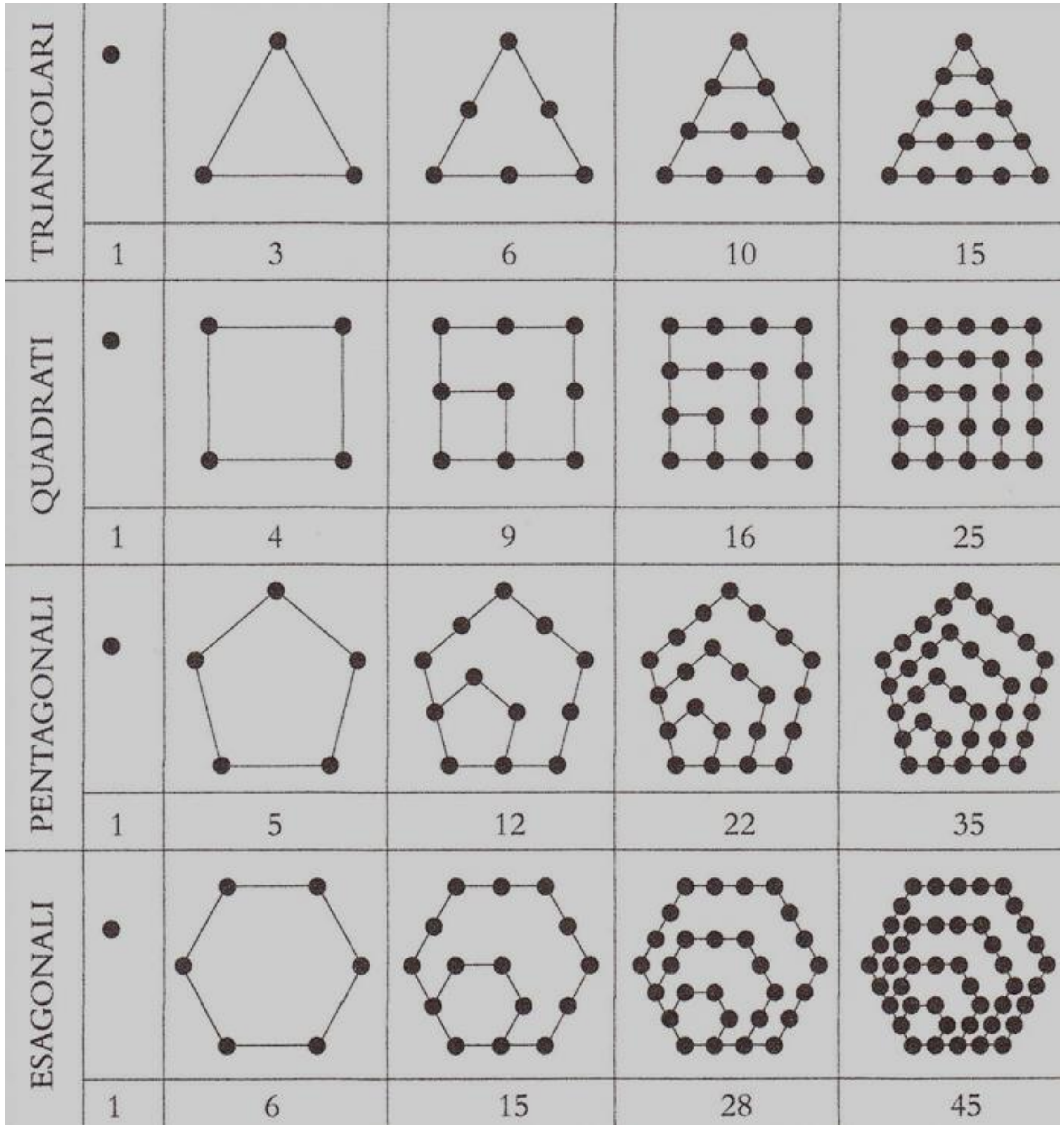
Valentina Bussu

A.A. 2012/2013

Definizione:

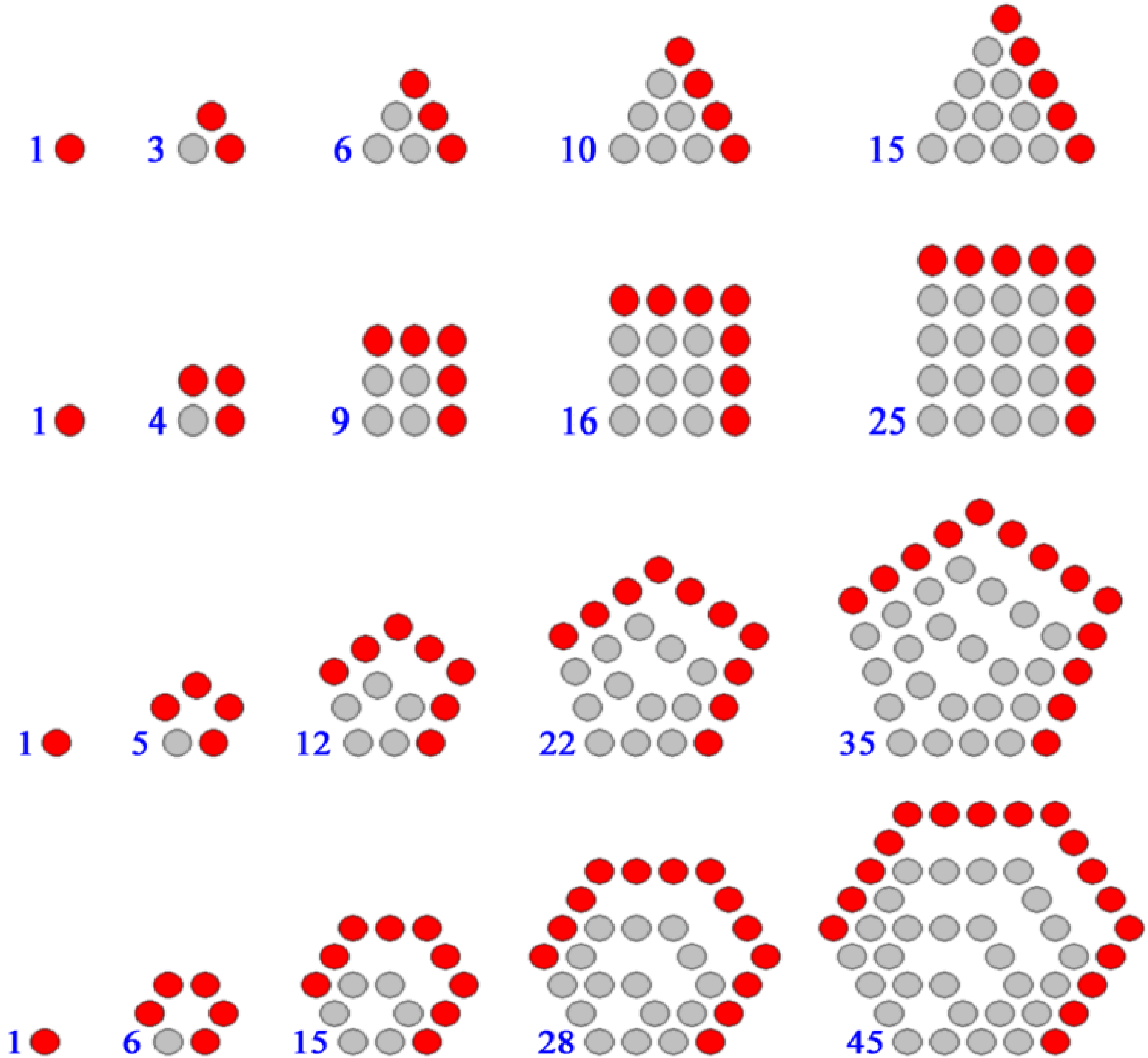
- Un numero figurato è un numero intero che può essere rappresentato mediante una disposizione geometrica e regolare di punti equidistanti.

  Se tale disposizione forma un poligono regolare il numero è chiamato numero poligonale.

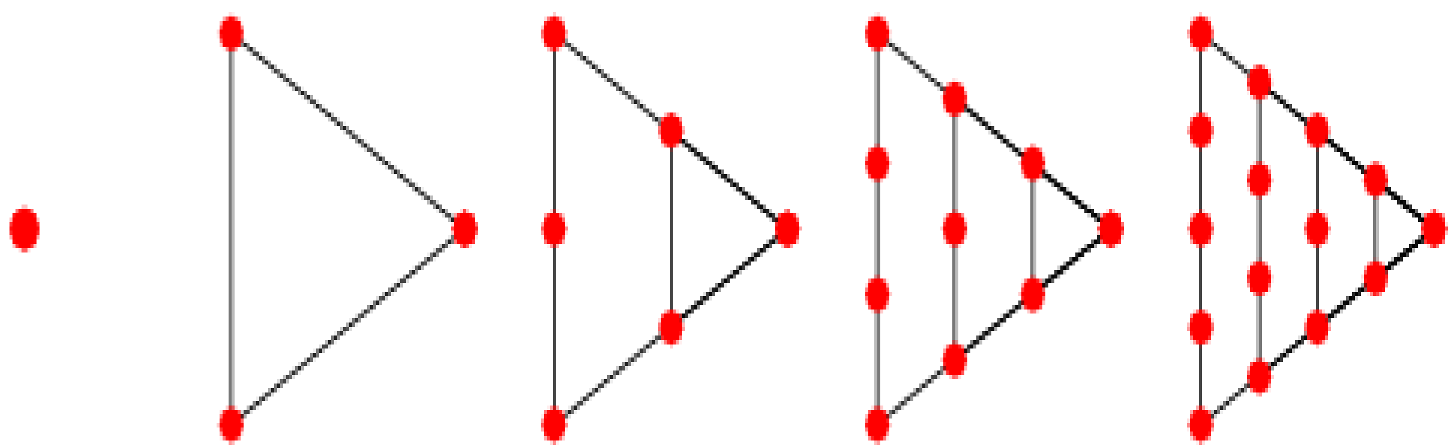

TRIANGOLARI
1
3
6
10
15
QUADRATI
1
4
9
16
25
PENTAGONALI
1
5
12
22
35
ESAGONALI
1
6
15
28
45

Cenni storici:

- Greci;
- Pitagorici (500 a.C.);
- Archimede (III secolo a.C.)


1 3 6 10 15
1 4 9 16 25
1 5 12 22 35
1 6 15 28 45

Costruzione e proprietà dei numeri triangolari:



In questo modo i primi numeri triangolari ottenuti sono:

1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, ….

ossia 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, …

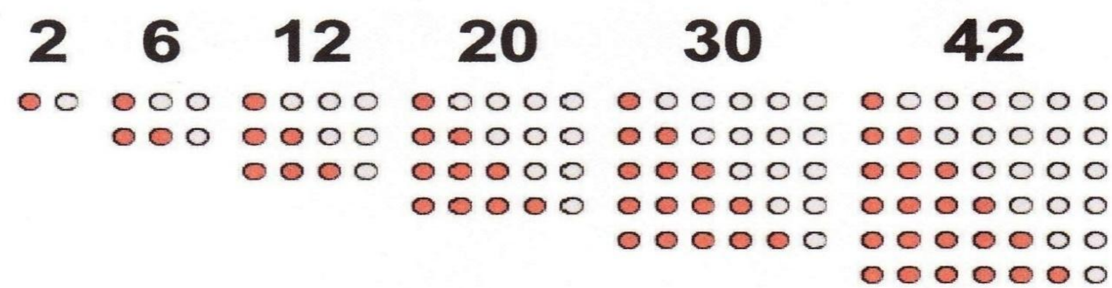
Formula generale per trovare l'n-esimo numero triangolare:

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Formula di Gauss

Formula di Gauss

- dimostrazione geometrica:



- dimostrazione intuitiva:

1+2+3+5+6+……….+98+99+100

100+99+98+………+5+4+3+2+1

=101+101+………………+101+101

Proprietà:

- Somma di due numeri triangolari consecutivi:

$$T_n + T_{n-1} = 1 + 2 + 3 + .. + n + 1 + 2 + \cdots n - 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} =$$

$$= \frac{n^2 + n}{2} + \frac{n^2 - n}{2} = n^2$$

esempio: $T_5 + T_6 = 15 + 21 = 36 = 6^2$

- Quadrato di un numero triangolare:

$$(T_n)^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

esempio:

$$(T_4)^2 = 10^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

- I numeri perfetti sono numeri triangolari (numeri uguali alla somma dei loro divisori propri)

esempio: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$

- I reciproci dei numeri triangolari formano la serie di Mengoli moltiplicata per 2, la loro somma vale quindi 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Serie di Mengoli

- Ogni numero naturale si può scrivere come somma di al massimo tre numeri triangolari, eventualmente ripetuti (Gauss 1796).

- Differenza tra numeri triangolari consecutivi:

1 3 6 10 15 21 28 36 45 55 …

2 3 4 5 6 7 8 9 10 ….

- Funzione generatrice:

$$f(x)=\frac{x}{(1-x)^3}=x+3x^2+6x^3+10x^4+15x^5+\cdots$$

- Funzione generatrice esponenziale:

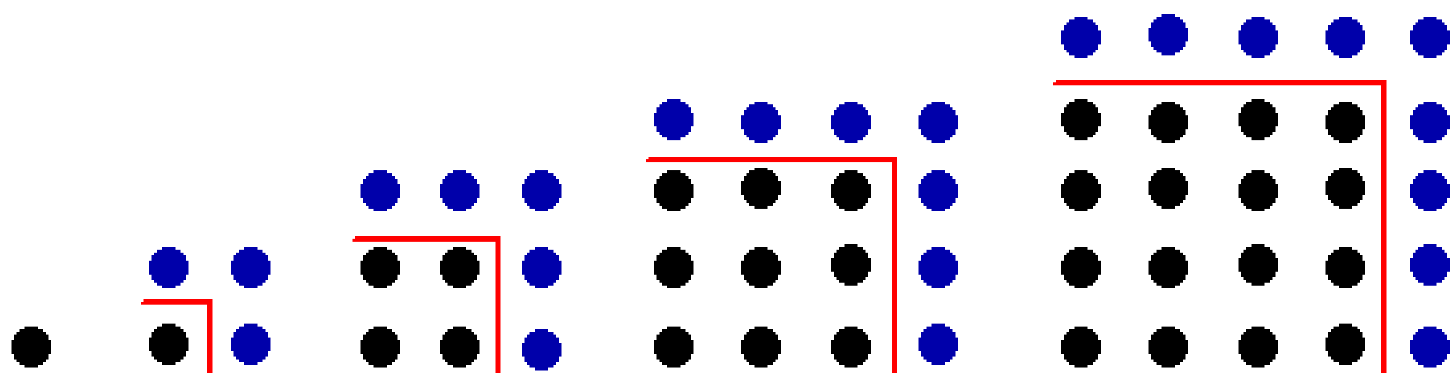
$$g(x) = \left(1 + 2x + \frac{1}{2}x^2\right)e^x = 1 + 3x + 3x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{5}{8}x^4 + \cdots$$
$$= 1 + \frac{3x}{1!} + \frac{6x^2}{2!} + \frac{10x^3}{3!} + \frac{15x^4}{4!} + \cdots$$

- Test per i numeri triangolari:

$$m = \frac{\sqrt{8n+1} - 1}{2}$$

se m è intero allora n è l'n-esimo numero triangolare

Costruzione e proprietà dei numeri quadrati:



In generale, l'n-esimo numero quadrato si ottiene dall'(n-1)-esimo aggiungendo una fila con n+1 elementi e completando la figura.

I primi numeri quadrati che si ottengono sono:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, …

L'n-esimo numero quadrato si ottiene dalla seguente formula:

$$Q_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Ossia sommando fra loro i primi n numeri dispari.

Si ha infatti:

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

Da cui si ottiene la seguente formula ricorsiva:

$$Q_n = Q_{n-1} + (2n-1) = (n-1)^2 + (2n-1) \quad n > 1 \quad Q_1 = 1$$

Che permette di calcolare il quadrato a partire dal precedente.

esempio: $Q_6 = (6-1)^2 + (12-1) = 5^2 + 11 = 25 + 11 = 36$

L’n-esimo quadrato può essere calcolato:

- dai precedenti due:

$$Q_n = 2(n-1)^2 - (n-2)^2 + 2$$

esempio: $Q_6 = 2(6-1)^2 - (6-2)^2 + 2 = 2 \cdot 25 - 16 + 2 = 50 - 16 + 2 = 36$

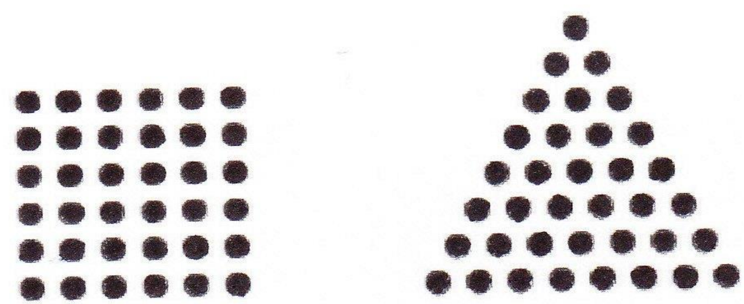
- dai precedenti tre:

$$Q_n = (n-1)^2 + (n-2)^2 - (n-3)^2 + 4$$

esempio: $Q_6 = (6-1)^2 + (6-2)^2 - (6-3)^2 + 4 = 25 + 16 - 9 + 4 = 36$

Numeri quadrati triangolari

- Graficamente si tratta si trovare un numero n di oggetti che possono essere disposti sia a formare un triangolo sia a formare un quadrato



- Dal punto di vista matematico, equivale a trovare una coppia di numeri interi n, m tali che:

$$\frac{n(n+1)}{2} = m^2$$

si tratta dell'equazione di Pell, la quale mette in relazione l'n-esimo numero triangolare con l'm-esimo numero quadrato.

Trasformando tale equazione si ottiene:

$$n^2 + n = 2m^2$$

$$n^2 + \frac{2n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 2m^2$$

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 = 2m^2 + \frac{1}{4}$$

$$(2n+1)^2 = 8m^2 + 1$$

posto

$$t = 2n + 1 \qquad\qquad q = 2m$$

Otteniamo:

$$t^2 = 2q^2 + 1$$

- I numeri che godono di tale proprietà sono infiniti.

Questo fatto venne dimostrato da Eulero nel 1730, il quale indicò anche un modo per ricavarli.

La formula generatrice è:

$$N_n = \frac{\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}\right]^2}{32}$$

I primi numeri della serie sono:

1, 36, 1225, 41616, 1413721…

Formule generali:

- Sia s il numero di lati di un poligono. Allora la formula per l'n-esimo numero s-gonale si ottiene dal precedente numero aggiungendo (s-2) lati lungo n, per un totale di (s-2)(n-1)+1 punti, ovvero:

$$P_s(n) = P_s(n-1) + (s-2)(n-1) + 1$$

equivalente a

$$P_s(n) = \frac{(s-2)n^2 - (s-4)n}{2}$$

Teorema di Fermat sui numeri figurati

Qualunque numero intero positivo può essere scritto come somma di al più N numeri poligonali di N lati eventualmente ripetuti.

Ovvero, ogni numero naturale è somma di 1, 2, o 3 numeri triangolari, è somma di 1, 2, 3, o 4 numeri quadrati, è somma di 1, 2, 3, 4, o 5 numeri pentagonali e così via per tutti gli altri numeri poligonali.

Questo teorema fu congetturato da Fermat.

Lagrange nel 1772 risolse il caso dei quadrati con il “Teorema dei quattro quadrati”.

Gauss provò il caso dei triangoli e Cauchy dimostrò per intero il teorema nel 1813.

Tabella dei primi numeri s-gonali con le rispettive formule generatrici:

NOME	FORMULA	n=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Triangolare	$\frac{1}{2}n(n+1)$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91
Quadrato	n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169
Pentagonale	$\frac{1}{2}n(3n-1)$	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176	210	247
Esagonale	$n(2n-1)$	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190	231	276	325
Ettagonale	$\frac{1}{2}n(5n-3)$	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235	286	342	403
Ottagonale	$n(3n-2)$	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280	341	408	481
Ennagonale	$\frac{1}{2}n(7n-5)$	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325	396	474	559
Decagonale	$n(4n-3)$	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370	451	540	637

Grazie per l’attenzione