UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE,FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

IL PROBLEMA DELLA MEMBRANA VIBRANTE IN DUE DIMENSIONI

Relatore: *Tesi di laurea:*

Prof. LUCIO CADEDDU **VALERIA MASCIA**

INDICE

1. INTRODUZIONE

L'argomento principale della tesi è la teoria delle funzioni di Bessel.

Le funzioni di Bessel non sono altro che le soluzioni di un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine. In generale è utile ricordare che un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine è un'espressione della forma:

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = F(x)$$

con P(x), Q(x), R(x) polinomi finiti che non hanno fattori comuni.

Si dovranno ricavare le due soluzioni e per far questo si possono utilizzare vari metodi a seconda dei casi che si presentano.

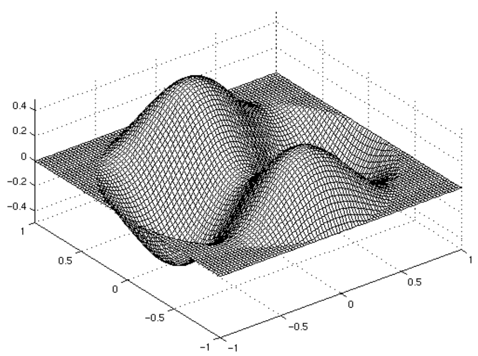
Solitamente queste equazioni descrivono situazioni fisiche concrete e perciò sono accompagnate da condizioni iniziali e condizioni al contorno che danno informazioni sullo stato iniziale del nostro sistema fisico, che bisogna tener presente quando si ricercano le soluzioni.

Nella ricerca delle soluzioni dell'equazione di Bessel viene utilizzato il metodo di Frobenius che cerca la soluzione sotto forma di serie di potenze e può essere applicato al caso in cui l'equazione abbia coefficienti variabili, in questo caso polinomi.

Verrà trattata anche una caratteristica particolare delle funzioni di Bessel che è l'ortogonalità e inoltre una conseguenza di questa, cioè lo sviluppo delle serie di Bessel-Fourier .

Infine sarà analizzata un'applicazione fisica delle funzioni di Bessel, cioè lo studio dell'oscillazione di una membrana elastica: tale problema è infatti descritto da un'equazione differenziale del secondo ordine, in due dimensioni, in funzione del tempo. La soluzione sarà ricercata in due casi: in una dimensione ed in due dimensioni. In quest'ultimo caso serviranno tutti i concetti precedentemente esposti sulle funzioni di Bessel .

Saranno infine mostrate simulazioni ottenute con Matlab.



2. WILHELM BESSEL (22 Luglio 1784/ 17 Marzo 1846)

W.Bessel fu grande matematico e astronomo tedesco. Secondo figlio di un funzionario, nato a Minden (ora Germania) studiò per 4 anni al Ginnasio ma le sue difficoltà con il latino lo indussero ad abbandonare gli studi all'età di 14 anni nel Gennaio del 1799.

Diventò apprendista in un'azienda di Brema che si occupava di import-export e così mostrò il suo interesse per il commercio estero. Continuò i suoi studi in tarda sera apprendendo in breve tempo geografia, spagnolo e inglese.

I suoi interessi furono rivolti alla navigazione ed al problema di determinare la posizione di una nave in mare, al calcolo della longitudine, cosicché iniziò ad occuparsi di matematica e astronomia.

Nel 1804 scrisse un documento nel quale riportò il calcolo dell'orbita della cometa di Halley ed inviò i suoi risultati al fisico Heinrich Olbers che riconobbe le sue qualità di astronomo e gli propose un posto da assistente all'osservatorio Lilienthal, vicino Brema.

Fu così che iniziò ad osservare stelle e pianeti e continuare i suoi studi di meccanica celeste.

Nel 1809 fu nominato direttore del nuovo osservatorio a Königsberg nonché professore di astronomia dopo che gli fu riconosciuto il titolo di dottore presso l'università di Göttingen su raccomandazione di Gauss che lo incontrò precedentemente nel 1807 e riconobbe il suo talento.

Bessel ottenne l'incarico all'osservatorio il 10 Maggio del 1810 sebbene questo fosse ancora in costruzione, continuando ad occuparsi delle osservazioni e delle teorie già sviluppate dall'astronomo inglese Bradley.

Nel 1813 l'osservatorio fu ultimato e Bessel iniziò il suo incarico. Bessel restò a Königsberg per il resto della sua vita proseguendo la ricerca e l'insegnamento; divenuto astronomo e matematico di fama internazionale rifiutò la direzione all'osservatorio di Berlino nonostante la precedente elezione all'Accademia berlinese grazie agli importanti risultati ottenuti.

Già nel 1840 non godeva di buone condizioni di salute, nonostante ciò compì l'ultimo viaggio nel 1842 in Inghilterra per partecipare al congresso della British Association a Manchester e l'incontro con importanti scienziati inglesi lo stimolò a terminare e pubblicare alcune opere nonostante la sua salute ulteriormente indebolita.

Gli studi in astronomia lo obbligarono ad approfondire la matematica per la quale elaborò un metodo di analisi che utilizza la oggi nota funzione di Bessel. Questa fu introdotta nel 1817 nello studio di un problema di Keplero sulla determinazione del movimento di tre corpi soggetti a reciproca attrazione gravitazionale.

Già in precedenza le funzioni di Bessel erano state accennate da matematici quali Bernoulli, Eulero e Lagrange e probabilmente il lavoro di quest'ultimo sulle orbite ellittiche servì da suggerimento per i lavori successivi di Bessel.

Morì nel Marzo del 1846 in Prussia.

3. LE FUNZIONI DI BESSEL

L' equazione di Bessel può essere scritta nella forma

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

con ν reale positivo.

Le soluzioni di questa equazione sono dette *funzioni di Bessel* . Questa equazione differenziale è del secondo ordine e pertanto deve ammettere almeno due soluzioni linearmente indipendenti.

Prima di descrivere le soluzioni dell'equazioni di Bessel che saranno ricercate utilizzando il metodo di Frobenius, è meglio riportare qualche definizione preliminare, utile per capire la trattazione successiva.

FUNZIONE GAMMA

Essa è descritta in questo modo

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-q} q^{x-1} dq$$ con x > 0, parametro reale.

Direttamente dalla definizione discendono le seguenti proprietà:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-q} dq = 1\,;$$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-q} q^x dq$$ che integrata per parti fornisce il seguente risultato:

$$\Gamma(x+1) = [-q^x e^{-q}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-q} x q^{x-1} dq = x\int_0^\infty e^{-q} q^{x-1} dq = x\Gamma(x)$$

Quindi da questa deriva la relazione

$\Gamma(x+1)= x\Gamma(x)$.

Scelto x = n intero positivo si ottiene

$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots=n(n-1)\ldots 2\cdot 1=n!$

Un interessante risultato è quello che si ottiene calcolando $\Gamma(1/2)$, infatti

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-q} q^{-1/2} dq = 2\int_0^\infty e^{-Q^2} dQ$$

dove si è applicata la sostituzione $Q=q^{1/2}$ e $dQ=1/2q^{-1/2}dq$

Per risolvere questo integrale,è possibile adottare una strategia, cioè sviluppare $[\Gamma(1/2)]^2$ e operare un cambiamento di variabili nelle coordinate polari.

Allora, scegliendo una nuova variabile $Q = \overline{Q}$

$$\left\{\Gamma(\frac{1}{2})\right\}^2 = (2\int_0^\infty e^{-Q^2} dQ)(2\int_0^\infty e^{-\overline{Q}^2} d\overline{Q})$$

Poiché i limiti sono indipendenti è possibile combinare gli integrali ottenendo :

$$\left\{\Gamma(\frac{1}{2})\right\}^2 = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{(-Q^2+\overline{Q}^2)} dQ d\overline{Q} = 4\int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} dr d\vartheta$$

dove in quest'ultimo integrale è stato utilizzato il cambiamento di variabili $dQd\overline{Q} = rdrd\vartheta$ e $Q = rCos\vartheta$ e $\overline{Q} = rSen\vartheta$.

Integrando prima rispetto a θ e poi rispetto a r si ottiene π cosicché estraendo la radice si ottiene:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-Q^2}\,dQ = \sqrt{\pi}$$

Per valori negativi di x la funzione Gamma può essere definita in questo modo

$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ cosicché per esempio $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$

SIMBOLI DI POCKHAMMER

I simboli di Pockhammer sono un modo semplice per scrivere lunghi prodotti:

$$(\alpha)_r = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+r-1)$$

cioè in generale è un prodotto di r termini per cui

$(\alpha)_1 = \alpha$
$(\alpha)_2 = \alpha(\alpha+1)$ e così via.

Per convenzione $(\alpha)_0 = 1$, inoltre applicando la definizione si nota che $(1)_n = n!$
Prendendo in considerazione i seguenti risultati:

$$(x)_n = x(x+1)(x+2)...(x+n-1);$$

$$\Gamma(x)(x)_n = \Gamma(x)[x(x+1)(x+2)...(x+n-1)] = [\Gamma(x)x][(x+1)(x+2)...(x+n-1)]$$

con x reale e n intero positivo e ricordando che $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ si giunge all'equazione

$$\Gamma(x)(x)_n = \Gamma(x+1)[(x+1)(x+2)...(x+n-1)].$$

Allora ripetendo il procedimento, si ha che

$\Gamma(x+1)(x+1) = \Gamma(x+2)$ ……

e così via. Questo porta all'equazione:

$$\Gamma(x)(x)_n = \Gamma(x+n-1)(x+n-1) = \Gamma(x+n)$$

che fornisce la relazione tra funzione Γ e simboli di Pockhammer $\Gamma(x)(x)_n = \Gamma(x+n)$

LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DI BESSEL

Per cercare le soluzioni dell'equazione di Bessel si può ricorrere al metodo di Frobenius che si applica ad equazioni differenziali a coefficienti variabili ed al caso specifico in cui i coefficienti variabili siano polinomi. Questo metodo cerca la soluzione nella seguente forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+c}$$

Quindi calcolandone la derivata prima e seconda si ottiene:

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+c) x^{n+c-1}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+c)(n+c-1) x^{n+c-2}$$

E sostituendo nell'equazione di Bessel questa diventa:

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+c)(n+c-1) x^{n+c-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+c) x^{n+c-1} + (x^2 - \nu^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+c} = 0$$

Combinando le precedenti sommatorie si ottiene l'equazione più compatta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n[(n+c)^2 - \nu^2]x^{n+c} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+c+2} = 0$$

Estraendo i primi due termini dalla prima sommatoria e risistemando le somme con $n \geq 2$ si ha:

$$a_0(c^2 - \nu^2)x^c + a_1[(1+c)^2 - \nu^2]x^{c+1} + \sum_{n=2}^{\infty} [a_n[(n+c)^2 - \nu^2] + a_{n-2}]x^{n+c} = 0$$

Ora i coefficienti di queste potenze in x devono essere tutti nulli per verificare l'equazione.
In questo sviluppo, se si considera il coefficiente della prima potenza, l'equazione c^2-ν^2 = 0 si chiama "indiciale" , cioè quando (per $a_0 \neq 0$) c = ±ν , il coefficiente del termine x^c è nullo.

Ora si possono distinguere diversi casi:

1° CASO:
la differenza tra le due radici nell'equazione indiciale non è un intero. Utilizzando la seconda regola generale di Frobenius che afferma che sotto queste ipotesi la soluzione generale dell'equazione si trova sostituendo successivamente le due soluzioni nella relazione di ricorrenza (cioè l'equazione che definisce il coefficiente del termine x^{n+c}) ,si ottiene:

$$a_1[(1 \pm \nu)^2 - \nu^2] = a_1(1 \pm 2\nu) = 0$$

che implica che a_1=0 quando 2ν non è intero.
Per il generico termine (relazione di ricorrenza) si ha invece:

$$a_n[(n \pm \nu)^2 - \nu^2] + a_{n-2} = 0$$

per n=2,3…, che implica che a_n=0 per n dispari.
E' possibile dunque determinare al variare di n le espressioni per a_n per generali valori del parametro ν, tendendo conto che

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n \pm 2\nu)}$$

Ad esempio

n = 2 implica $a_2 = -\dfrac{a_0}{2(2 \pm 2\nu)}$

n = 4 implica $a_4 = -\dfrac{a_2}{4(4 \pm 2\nu)}$.

Sostituendo la relazione per n=2 nella precedente si trova che $a_4 = \dfrac{a_0}{(4 \pm 2\nu)(2 \pm \nu)\cdot 4 \cdot 2} = \dfrac{a_0}{2^2(2 \pm \nu)(1 \pm \nu)2^2(2 \cdot 1)}$.

In generale vale la relazione:

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{2^{2n}(1 \pm \nu)_n n!}$$

dove è stato usato il simbolo di Pockhammer per semplificare l'espressione, cioè:

$$(1 \pm \nu)_n = (1 \pm \nu)(1 \pm \nu + 1)(1 \pm \nu + 2)\cdots(1 \pm \nu + n - 1) \; .$$

Utilizzando questa espressione per il coefficiente si ha che

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+c} = a_0 x^{\pm\nu} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(1 \pm \nu)_n n!}$$

Scegliendo opportunamente a_0 la precedente equazione si può riscrivere in questo modo :

$$y(x) = A \frac{x^{\pm\nu}}{2^{\pm\nu}\Gamma(1 \pm \nu)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2/4)^n}{(1 \pm \nu)_n n!} = AJ_{\pm\nu}(x)$$

Queste sono le funzioni di Bessel di ordine ±ν.

La generale soluzione dell'equazione di Bessel considerata nel caso in cui 2ν non sia un intero è dunque della forma:

$$y(x) = AJ_{\nu}(x) + BJ_{-\nu}(x)$$

con A e B costanti arbitrarie, con

$$J_{\pm\nu}(x) = \frac{x^{\pm\nu}}{2^{\pm\nu}\Gamma(1\pm\nu)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x^2/4)^n}{(1\pm\nu)_n n!}.$$

2°CASO

Si consideri il caso in cui l'equazione indiciale abbia due soluzioni coincidenti: l'unica possibilità, trattandosi di soluzioni uguali e opposte è che ν = 0. In tal caso bisogna utilizzare la terza regola generale di Frobenius che afferma che se l'equazione indiciale ha una radice doppia c = α, allora una soluzione si ottiene ponendo c = α nella relazione di ricorrenza e la seconda soluzione indipendente è $\left.\frac{\partial y}{\partial c}\right|_{c=\alpha}$ con $a_n = a_n(c)$ per il calcolo.

Sostituendo ν=0 nel coefficiente a_n e ricordando che $(1)_n = n!$, una prima soluzione è data da

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{x^2}{4}\right)^n.$$

La seconda soluzione ottenuta considerando $\left.\frac{\partial y}{\partial c}\right|_{c=\alpha} = 0$ ha espressione:

$$Y_0(x) = J_0(x)\log x - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\Phi(n)}{(n!)^2}\left(\frac{x^2}{4}\right)^n$$

che è detta ***FUNZIONE DI BESSEL-WEBER*** di ordine 0 dove

$$\Phi(n) = \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}.$$

3°CASO

Ora si consideri il caso in cui 2ν è un intero diverso da 0, partendo dal caso in cui 2ν è un intero dispari, cioè 2ν=2n+1 e ν=n+1/2.

La soluzione diventa:

$$y(x) = AJ_{n+1/2}(x) + BJ_{-n-1/2}(x)$$

ESEMPIO

Questo è quanto si verifica quando ν = 1/2. L'equazione di Bessel diventa

$$\frac{d^{2y}}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0$$

Il risultato trovato è

$$y(x) = a_0 \frac{\cos x}{x^{1/2}} + a_1 \frac{senx}{x^{1/2}} \qquad \text{dove} \quad J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} senx \quad \text{e} \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x .$$

4°CASO

Infine si studi il caso in cui 2ν è un intero pari e di conseguenza ν è un intero. La soluzione che si trova è

$$y = AJ_\nu(x) + BY_\nu(x) \qquad \text{dove } Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{sen\,\nu\pi}$$

è la funzione di Weber-Bessel di ordine ν.

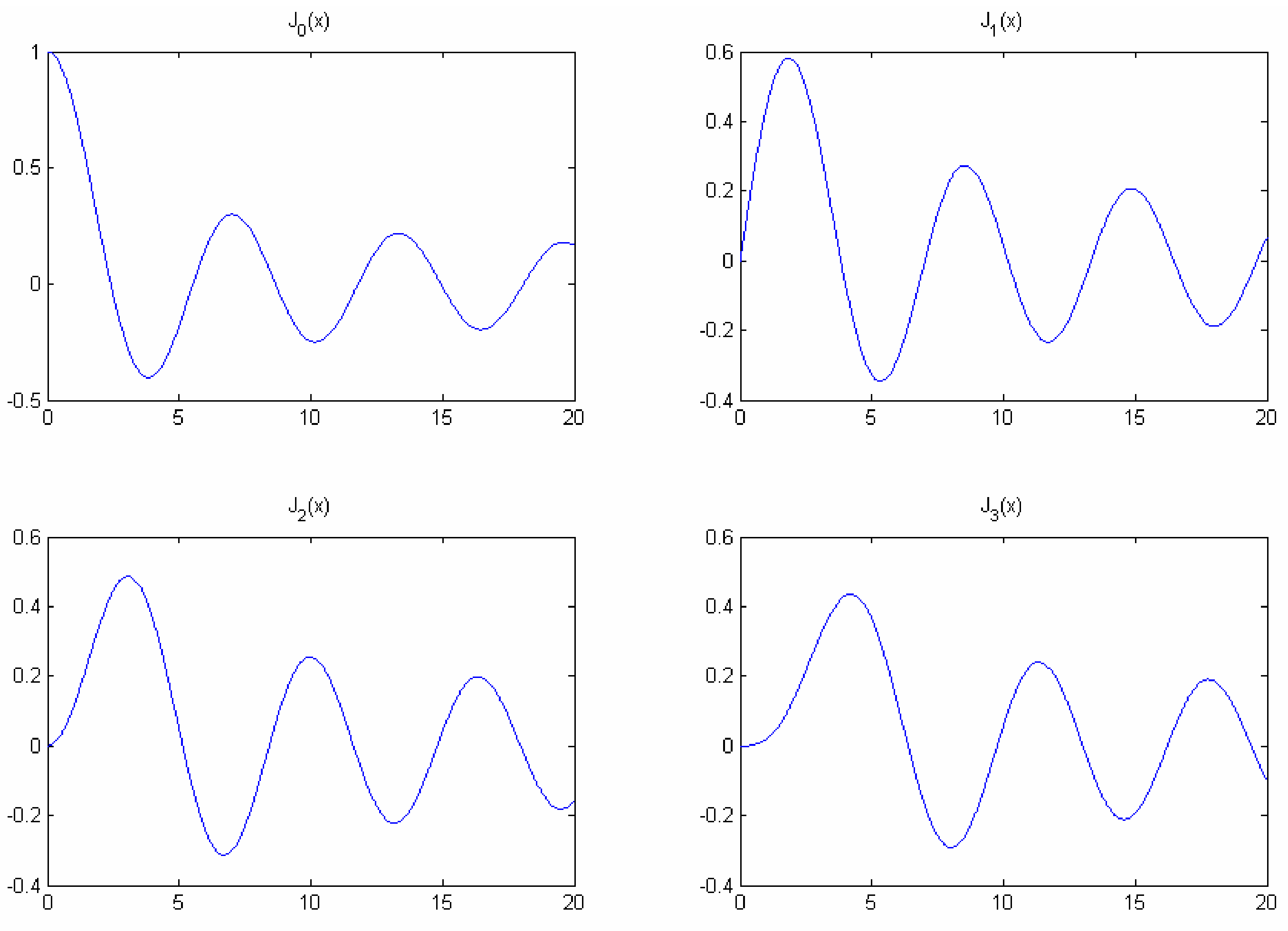
La seconda soluzione dell'equazione di Bessel può essere determinata usando il metodo di riduzione dell'ordine che si applica all'equazione differenziale quando una soluzione è già nota attraverso ripetute sostituzioni e operazioni di derivazione (che vengono omesse) con il quale si arriva all'espressione

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BJ_\nu(x)\int^x \frac{1}{qJ_\nu(q)^2}dq .$$

Talvolta la $J_\nu(x)$ è detta funzione di Bessel di prima specie e la $Y_\nu(x)$ funzione di Bessel di seconda specie.

Le seguenti figure create con Matlab mostrano l'andamento della funzione $J_i(x)$ quando $0 \le i \le 3$. Si può notare che hanno tutte andamenti molto simili tranne nel caso in cui ν = 0 in cui la funzione parte da 1 quando x=0.

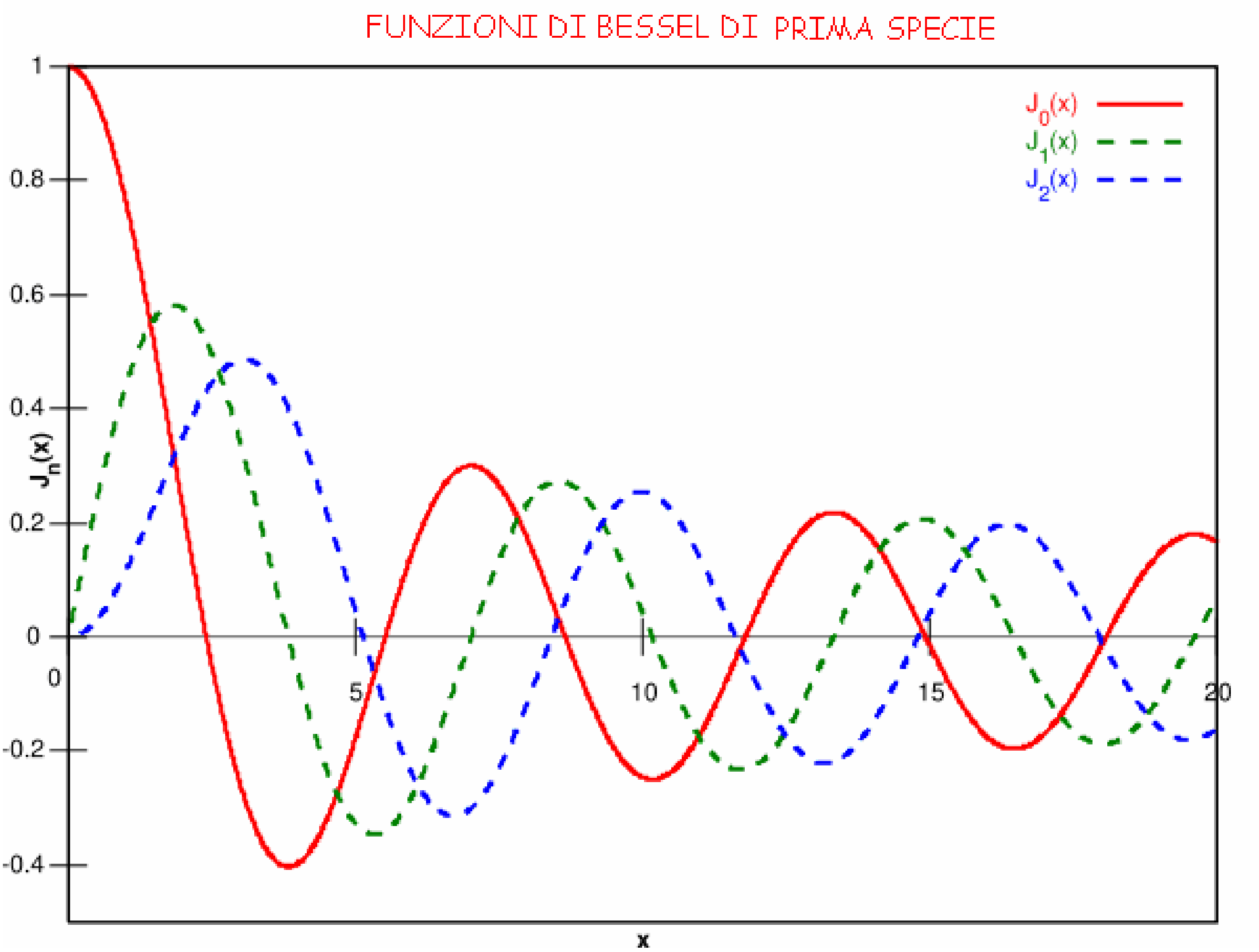
$$J_{\pm\nu}(x) = \frac{x^{\pm\nu}}{2^{\pm\nu}\Gamma(1\pm\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2/4)^n}{(1\pm\nu)_n\, n!}$$



E' stato utilizzato il seguente script su Matlab per generare il grafico:

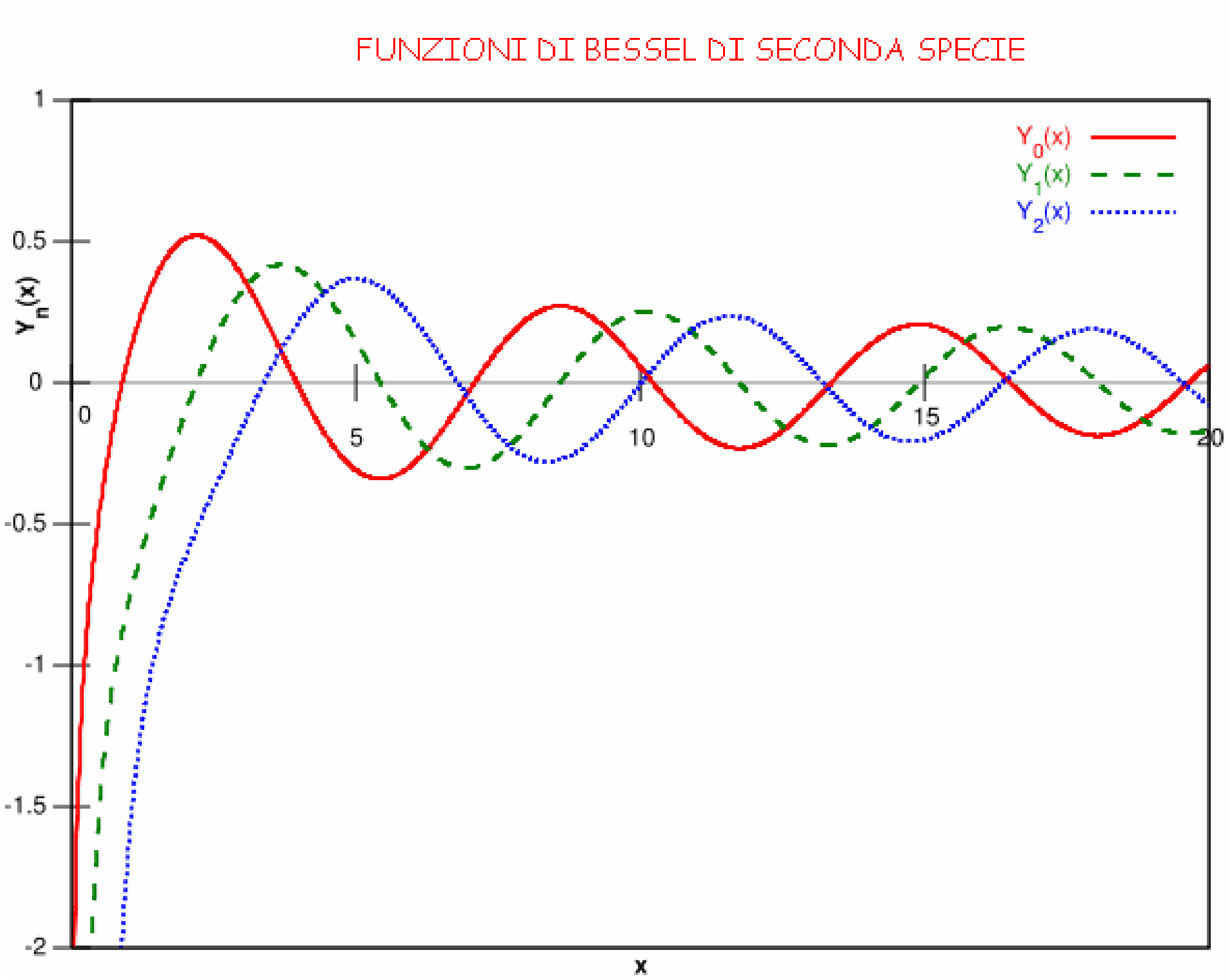
```
x=0:0.02:20;
subplot(2,2,1),plot(x,besselj(0,x)),title('J_0(x)')
subplot(2,2,2),plot(x,besselj(1,x)),title('J_1(x)')
subplot(2,2,3),plot(x,besselj(2,x)),title('J_2(x)')
subplot(2,2,4),plot(x,besselj(3,x)),title('J_3(x)')
```

La seguente figura mostra le diverse funzioni $J_i(x)$ evidenziate con colori diversi per i=0,1,2.



La seguente figura mostra invece l'andamento della funzione $Y_\nu(x)$ per diversi valori di ν.

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{sen\,\nu\pi}$$



ORTOGONALITA' DELLE FUNZIONI DI BESSEL

E' possibile dimostrare che le funzioni di Bessel sono funzioni ortogonali e quindi possono essere usate come base per uno spazio vettoriale su un intervallo definito.
Questo fatto permette di sviluppare le serie di Bessel-Fourier.
Si prenda l'intervallo chiuso [0,a] con *a* arbitrario. La funzione

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(1+\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2/4)^n}{(1+\nu)_n n!}$$

già precedentemente trovata soddisfa l'equazione di Bessel

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

e considerando la sostituzione di λx con x nella funzione di Bessel, dove λ è costante, è possibile ricavare dall'equazione sopra la nuova espressione:

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} J_\nu(\lambda x) + x\frac{d}{dx} J_\nu(\lambda x) + (\lambda^2 x^2 - \nu^2) J_\nu(\lambda x) = 0$$

La scelta di λ è fatta in maniera tale che $J_\nu(\lambda a) = 0$ e ci sono un'infinità numerabile di valori per cui questo è vero, come si può vedere anche osservando le precedenti figure sull'andamento di $J_i(x)$.
Ora si scelga un valore $\mu \neq \lambda$ tale che $J_\nu(\mu a)=0$ per cui $J_\nu(\mu a)$ soddisfi l'equazione di Bessel cioè

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} J_\nu(\mu x) + x\frac{d}{dx} J_\nu(\mu x) + (\mu^2 x^2 - \nu^2) J_\nu(\mu x) = 0 .$$

Moltiplicando la precedente equazione in λx per $J_\nu(\mu x)/x$ e integrando da 0 ad *a* si ottiene

$$\int_0^a J_\nu(\mu x)[x\frac{d^2}{dx^2} J_\nu(\lambda x) + \frac{d}{dx} J_\nu(\lambda x) + \frac{1}{x}(\lambda^2 x^2 - \nu^2) J_\nu(\lambda x)] = 0 \quad \text{(a)}$$

Allo stesso modo si può considerare l'equazione in μx e moltiplicare per $J_\nu(\lambda x)/x$ e poi nuovamente integrare come prima.
Il risultato è il seguente integrale

$$\int_0^a J_\nu(\lambda x)[x\frac{d^2}{dx^2}J_\nu(\mu x)+\frac{d}{dx}J_\nu(\mu x)+\frac{1}{x}(\mu^2x^2-\nu^2)J_\nu(\mu x)]=0 \quad \text{(b)}$$

Sottraendo la (a) dalla (b) e tenendo conto del fatto che $xJ_\nu'' + J_\nu' = (xJ_\nu')'$ si ottiene

$$\int_0^a \left\{J_\nu(\mu x)\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}J_\nu(\lambda x)\right)-J_\nu(\lambda x)\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}J_\nu(\mu x)\right)+x(\lambda^2-\mu^2)J_\nu(\lambda x)J_\nu(\mu x)\right\}dx=0 \quad \text{(c)}$$

Allora si consideri il primo integrando della (c) e applicando l'integrazione per parti otteniamo

$$\int_0^a \left\{J_\nu(\mu x)\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}J_\nu(\lambda x)\right)\right\}dx=\left[J_\nu(\mu x)x\frac{d}{dx}J_\nu(\lambda x)\right]_0^a-\int_0^a x\frac{d}{dx}J_\nu(\lambda x)\frac{d}{dx}J_\nu(\mu x)dx$$

E allo stesso modo per il secondo termine

$$\int_0^a \left\{J_\nu(\lambda x)\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}J_\nu(\mu x)\right)\right\}dx=\left[J_\nu(\lambda x)x\frac{d}{dx}J_\nu(\mu x)\right]_0^a-\int_0^a x\frac{d}{dx}J_\nu(\mu x)\frac{d}{dx}J_\nu(\lambda x)dx.$$

Se si utilizzano questi risultati nell'espressione (c) allora si ottiene:

$$(\lambda^2-\mu^2)\int_0^a xJ_\nu(\lambda x)J_\nu(\mu x)dx=J_\nu(\lambda a)a\mu J_\nu'(\mu a)-J_\nu(\mu a)a\lambda J_\nu'(\lambda a)$$

Ma ricordando che λ e μ erano stati scelti in modo tale che $J_\nu(\lambda a) = J_\nu(\mu a) = 0$ ne deriva :

$$\int_0^a xJ_\nu(\lambda x)J_\nu(\mu x)dx=0\,.$$

Questa è la relazione di ortogonalità per le funzioni di Bessel.

Adesso nella penultima relazione scritta sopra si sostituisce $\lambda = \varepsilon + \mu$ e quando $\varepsilon<<1$ i termini che contengono il suo quadrato sono molto piccoli, pertanto la relazione si approssima in questo modo:

$$-2\mu\varepsilon\int_0^a xJ_\nu(\mu x)J_\nu(\mu x+\varepsilon x)dx = a[\mu J_\nu(\mu a+\varepsilon a)J_\nu^{'}(\mu a)-(\mu+\varepsilon)J_\nu(\mu a)J_\nu^{'}(\mu a+\varepsilon a)]$$

Si consideri ora un'espansione delle serie di Taylor nel punto $x = a(\mu+\varepsilon)$:

$$J_\nu(a(\mu+\varepsilon)) = J_\nu(a\mu)+\varepsilon aJ_\nu^{'}(a\mu)+\cdots \quad \text{e} \quad J_\nu^{'}(a(\mu+\varepsilon)) = J_\nu^{'}(a\mu)+\varepsilon aJ_\nu^{''}(a\mu)+\cdots$$

Se la si sostituisce nell'equazione precedente, la si divide per ε e si considera il limite per ε che tende a 0, si ottiene:

$$\int_0^a x[J_\nu(\mu x)]^2 dx = \frac{a^2}{2}[J_\nu^{'}(\mu a)]^2 - \frac{1}{2}a^2 J_\nu(\mu a)J_\nu^{''}(\mu a) - \frac{a}{2\mu}J_\nu(\mu a)J_a^{'}(\mu a).$$

Con l'ipotesi $J_\nu(\mu a)=0$ l'integrale precedente si semplifica:

$$\int_0^a x[J_\nu(\mu x)]^2 dx = \frac{a^2}{2}[J_\nu^{'}(\mu a)]^2.$$

In generale

$$\int_0^a xJ_\nu(\lambda x)J_\nu(\mu x)dx = \frac{a^2}{2}[J_\nu^{'}(\mu a)]^2\delta_{\lambda\mu}$$ con $\delta_{\lambda\mu}$ delta di Kronecker . (d)

Si consideri la seguente espressione

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i J_\nu(\lambda_i x)$$

essa viene detta ***SERIE DI FOURIER-BESSEL*** dove i λ_i sono tali per cui $J_\nu(\lambda_i a) = 0$ per $i\geq 1$ con $\lambda_1 < \lambda_2 <\ldots$

Moltiplicando ambo i membri della serie per $xJ_\nu(\lambda_j x)$ e integrando sull'intervallo [0,a] si trova:

$$\int_0^a xJ_\nu(\lambda_j x)f(x)dx = \int_0^a xJ_\nu(\lambda_j x)\sum_{i=1}^{\infty} C_i J_\nu(\lambda_i x)dx$$

Assumendo che la serie converga, è possibile scambiare integrale e sommatoria ottenendo

$$\int_0^a xJ_\nu(\lambda_j x)f(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \int_0^a xJ_\nu(\lambda_j x)J_\nu(\lambda_i x)dx\,.$$

Ma allora combinando quest'ultima con la (d) si ottiene

$$\int_0^a xJ_\nu(\lambda_j x)f(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \frac{a^2}{2}[J_\nu^{'}(\lambda_j a)]^2 \delta_{\lambda_j\lambda_i} = C_j \frac{\lambda_j a^2}{2}[J_\nu^{'}(\lambda_j a)]^2$$

da cui si ricava:

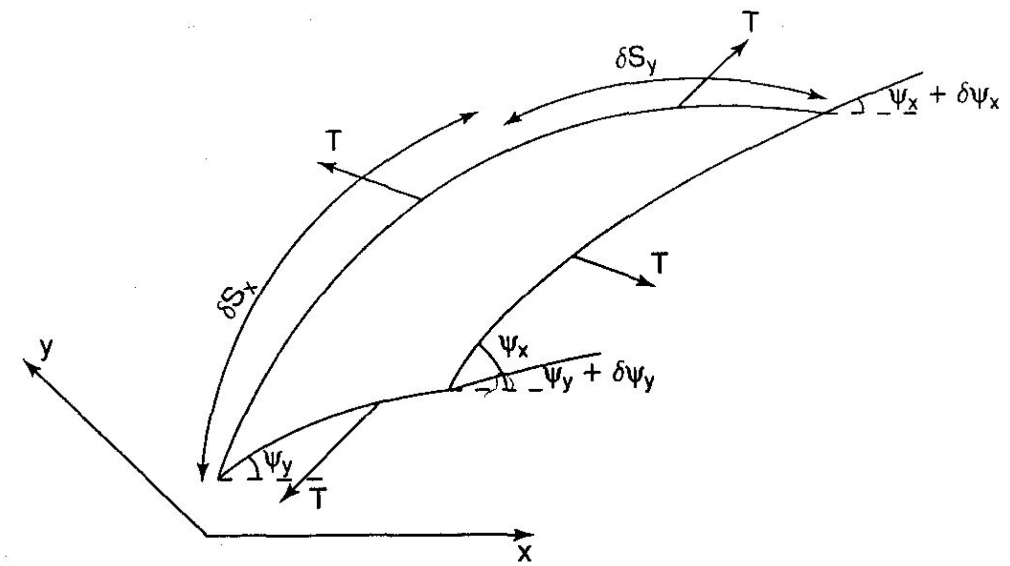
$$C_j = \frac{2}{a^2[J_\nu^{'}(\lambda_j a)]^2}\int_0^a xJ_\nu(\lambda_j x)f(x)dx\,.$$

4. UN'APPLICAZIONE FISICA DELLE FUNZIONI DI BESSEL: VIBRAZIONE DI UNA MEMBRANA ELASTICA

Uno degli esempi in cui le funzioni di Bessel trovano applicazione è la vibrazione di una membrana elastica.
L'oscillazione di una membrana sottoposta a sollecitazione può essere descritta matematicamente da un'equazione differenziale del secondo ordine la cui soluzione (in due dimensioni) può essere ricavata facendo uso della teoria delle funzioni di Bessel sopra descritta.

VIBRAZIONE DI UNA MEMBRANA ELASTICA

L'equazione che descrive i piccoli spostamenti di una membrana elastica è un'equazione in funzione della posizione e del tempo, cioè del tipo $z = z(x,y,t)$.
Consideriamo una membrana di lati δS_x lungo la direzione x e δS_y lungo la direzione y.
Supponiamo anche che questa formi angoli φ_x , $\varphi_x+\delta\varphi_x$ e φ_y , $\varphi_y+\delta\varphi_y$ con l'asse orizzontale.
La figura sottostante mostra una sezione della membrana e le grandezze sopra descritte.



Per descrivere l'equazione della membrana si consideri la seconda legge del moto lungo la direzione z:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\rho\delta S_x\delta S_y = \delta S_y[T\sin(\psi_x+\delta\psi_x)-T\sin(\psi_x)]+\delta S_x[T\sin(\psi_y+\delta\psi_y)-T\sin(\psi_y)]$$

dove ρ è la costante di densità superficiale (massa per unità di superficie) della membrana e T è la tensione che può essere assunta costante per piccole vibrazioni della membrana.

Se si considerano piccoli gli angoli e anche le loro variazioni la formula precedente può essere riscritta dividendo ambo i membri per l'area $\delta S_x \delta S_y$ e, utilizzando le formule di addizione del seno e considerando le approssimazioni per piccole misure, si ha:

$$\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \cos\psi_x \frac{\delta\psi_x}{\delta S_x} + \cos\psi_y \frac{\delta\psi_y}{\delta S_y} + \cdots$$

Questa può essere riscritta come segue, in quanto ragionando per misure piccole, che si restringono a 0, δS_x e δS_y tendono a 0, quindi:

$$\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \cos\psi_x \frac{\partial\psi_x}{\partial S_x} + \cos\psi_y \frac{\partial\psi_y}{\partial S_y}$$

Utilizzando la definizione di derivate parziali e di derivata come coefficiente angolare della retta tangente al grafico in un punto dato P, si può scrivere

$$\tan\psi_x = \frac{\partial z}{\partial x},$$
$$\tan\psi_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Derivando le due espressioni rispettivamente rispetto ad x e ad y si trova

$$\sec^2\psi_x \frac{\partial\psi_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$
$$\sec^2\psi_y \frac{\partial\psi_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

In entrambi i casi, per la x e per la y, le funzioni seno e secante sono entrambe prossime all'unità. Tenendo conto di questo e della seguente formula per il calcolo della lunghezza di un arco, si ottiene:

$$dS_x = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} dx \approx dx \qquad \text{con } \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| << 1 \text{ e } \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| << 1$$
$$dS_y = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dy \approx dy$$

Quindi in base a quanto detto si ha

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial S_x} \approx \frac{\partial \psi_x}{\partial x}$$
$$\frac{\partial \psi_y}{\partial S_y} \approx \frac{\partial \psi_y}{\partial y}$$

Riprendendo allora la seguente formula $\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \cos\psi_x \frac{\partial \psi_x}{\partial S_x} + \cos\psi_y \frac{\partial \psi_y}{\partial S_y}$, tendendo conto del fatto che il coseno vale approssimativamente 1, riprendendo le precedenti scritte sopra e confrontandole con le seguenti $\begin{array}{l} \sec^2 \psi_x \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ \sec^2 \psi_y \frac{\partial \psi_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{array}$, si ottiene l'equazione finale:

$\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \nabla^2 z$ detta ***EQUAZIONE BIDIMENSIONALE DELL'ONDA.***

Essa rappresenta l'equazione che descrive i piccoli spostamenti della membrana elastica.

Soluzione dell'equazione dell'onda in una dimensione

Data l'equazione bidimensionale dell'onda si procede con il calcolo della soluzione in una dimensione.
La soluzione cercata è quindi del tipo z = z(x,t), indipendente dalla variabile y.
L'equazione in una dimensione dell'onda è quindi:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

dove c è la costante $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ con T la tensione e ρ la densità lineare.

Il modo più semplice per procedere è quello di fare un cambiamento di variabili, introducendo le variabili *caratteristiche*:

$$\xi = x - ct$$
$$\eta = x + ct$$

Considerando l'equazione scritta sopra, questa è del tipo $c^2 Z_{xx} - Z_{tt} = 0$ dove Z_{xx} e Z_{tt} indicano le derivate parziali seconde rispettivamente rispetto ad x ed a t.
Un'equazione di questo tipo è detta equazione iperbolica e per risolverla la si può riscrivere in maniera più semplice con il cambiamento di variabili sopra indicato.
Allora derivando parzialmente si ottiene:

$$Z_x = Z_\xi + Z_\eta$$
$$Z_t = -cZ_\xi + cZ_\eta$$

Derivando nuovamente rispetto a x e rispetto a t rispettivamente, si ha

$$Z_{xx} = Z_{\xi\xi} + 2Z_{\xi\eta} + Z_{\eta\eta}$$
$$Z_{tt} = c^2 Z_{\xi\xi} - 2c^2 Z_{\xi\eta} + c^2 Z_{\eta\eta}$$

Allora sostituendo queste nell'equazione

$$c^2 Z_{xx} - Z_{tt} = 0$$

si ottiene:

$$c^2 (Z_{\xi\xi} + 2Z_{\xi\eta} + Z_{\eta\eta}) - c^2 Z_{\xi\xi} + 2c^2 Z\xi\eta - c^2 Z_{\eta\eta} = 4c^2 Z_{\xi\eta}$$

Cioè l'equazione iniziale si riduce allo studio di

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} = 0$$

Integrando rispetto alla variabile η si ottiene

$$\frac{\partial z}{\partial\xi} = F(\xi)$$

Integrando infine rispetto alla variabile ξ si ha

$$z = \int^{\xi} F(s)ds + g(\eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

per cui, ricordando come sono state definite le variabili caratteristiche, si ottiene:

$$z(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

Questa è la soluzione generale dell'onda e il motivo per cui essa è scomposta in due funzioni si spiega dal punto di vista fisico nel fatto che l'onda si scompone in due moti: uno rappresentato dalla f(x-ct) che si propaga da sinistra a destra alla velocità c e l'altro rappresentato da g(x+ct) da destra a sinistra con la stessa velocità.
Si noti che se x = ct + cost allora f(x-ct) è costante, allo stesso modo se x = -ct+cost allora g(x+ct) è costante.
A questo punto bisogna determinare le funzioni f e g e ci si riconduce ad un problema di Cauchy in cui le condizioni iniziali del problema sono:

$$z(x,0) = z_0(x)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x,0) = u_0(x)$$

cioè si suppone di conoscere la posizione della funzione z all'istante iniziale e anche la velocità del punto x per t=0.

Con queste condizioni si ottengono due equazioni il cui sistema fornisce la soluzione. La prima di queste equazioni è

$$z(x,0) = f(x) + g(x) = z_0(x)$$

La seconda la troviamo calcolando la derivata di z rispetto al tempo in t=0, perciò

$$\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=0} = -cf'(x-ct) + cg'(x+ct)\Big|_{t=0} = -cf'(x) + cg'(x) = u_0(x)$$

Adesso le due equazioni ci devono dare l'espressione della f e della g perciò, integrando quest'ultima otteniamo per esempio:

$$-cf(x) + cg(x) = \int_a^x u_0(s)ds$$

dove a è una costante arbitraria. Allora mettendo a sistema le due equazioni

$$z(x,0) = f(x) + g(x) = z_0(x)$$

$$-cf(x) + cg(x) = \int_a^x u_0(s)ds$$

si ottengono le funzioni:

$$f(x) = \frac{1}{2}z_0(x) - \frac{1}{2c}\int_a^x u_0(s)ds$$ e

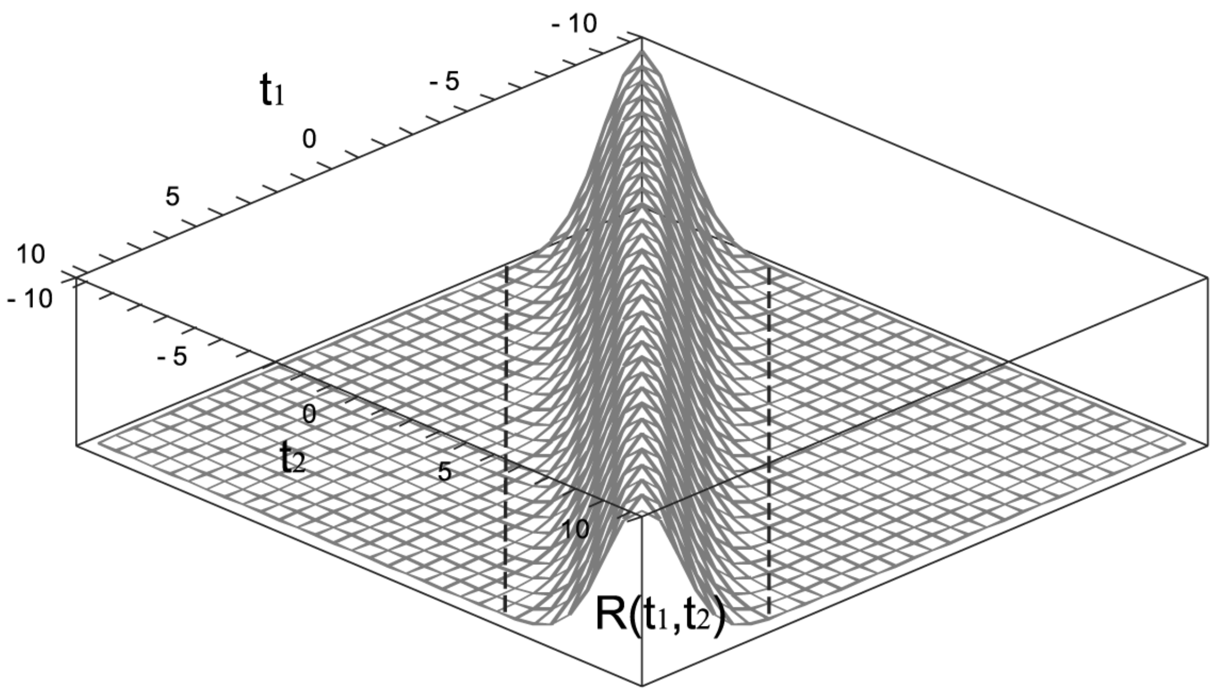
$$g(x) = \frac{1}{2}z_0(x) + \frac{1}{2c}\int_a^x u_0(s)ds$$

Sostituendo quest'ultime equazioni in $z(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$ si ha la soluzione dell'onda :

$$z(x,t) = \frac{1}{2}\left[z_0(x-ct) + z_0(x+ct)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} u_0(s)ds$$ detta ***SOLUZIONE DI D'ALEMBERT.***

Da questa in particolare si nota che se $u_0(x) = 0$, cioè se è nulla la velocità iniziale allora la soluzione è data dalla composizione di un moto a sinistra e a destra dell'onda.

Ecco qui di seguito rappresentato l'andamento della soluzione dell'equazione bidimensionale dell'onda in una dimensione



Soluzione dell'equazione dell'onda in due dimensioni

Si riprenda adesso l'equazione dell'onda in due dimensioni

$$\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\nabla^2 z$$

per la membrana elastica, a forma di disco, che sia fissata su un supporto circolare (tipo tamburo).
Se in essa si sostituiscono le coordinate cilindriche:

$$x = r\cos\vartheta$$
$$y = r\sin\vartheta$$
$$z = t$$

si ottiene la seguente equazione (dove è stato omesso il calcolo piuttosto lungo):

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \vartheta^2}$$

Per determinare le soluzioni si consideri il dominio circolare
$0 \le r \le a$;
$0 \le \theta \le 2\pi$
Esse saranno periodiche di 2π in θ.
Si prendano come condizioni al contorno per la nostra equazione differenziale $z = 0$ per $r = a$.
Si cerchi una soluzione del tipo

$$z = R(r)\tau(t)\Theta(\vartheta)$$

Sostituendo quest'espressione nell'equazione sopra si ottiene la seguente:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\tau''}{\tau}=\frac{rR''+R'}{rR}+\frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta}=-\frac{w^2}{c^2}$$

dove $-\frac{w^2}{c^2}$ è una costante di separazione.

Risolvendo l'equazione differenziale del secondo ordine rispetto a τ una soluzione è

$$\tau = e^{i\omega t}$$

che rappresenta una soluzione periodica nel tempo, il che non deve stupire se si pensa a come oscilla la membrana, che può essere paragonata ad un tamburo.
w rappresenta la frequenza angolare.
L'equazione differenziale considerata può essere anche riscritta nel seguente modo:

$$\frac{r^2 R'' + R'}{R} + \frac{w^2 r^2}{c^2} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = n^2$$ con n^2 costante di separazione.

Risolvendo l'equazione a variabili separabili del secondo ordine in θ si trova la seguente soluzione data dalla combinazione in seno e coseno:

$$\Theta = A\cos n\vartheta + B\sin n\vartheta$$

con n intero positivo per il fatto che la soluzione è periodica di 2π.
Infine, si prenda nuovamente in considerazione l'equazione differenziale sopra e si noti che questa può essere riscritta come:

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} + \left(\frac{w^2}{c^2}r^2 - n^2\right)R = 0$$

Introducendo le seguenti coordinate $s = \lambda r$ con $\lambda = \omega / c$ nella precedente, si giunge all'espressione:

$$s^2\frac{d^2R}{ds^2} + s\frac{dR}{ds} + (s^2 - n^2)R = 0$$

nella quale è possibile riconoscere l'equazione di Bessel con ν = n.
Ma allora seguendo la trattazione fatta per trovare le soluzioni di questa equazione, nel caso in cui ν era un intero, si ha una soluzione della forma:

$$R(s) = AJ_n(s) + BY_n(s)$$

Per avere una soluzione limitata nell'origine è necessario che B=0 in quanto la funzione $Y_n(s)$ è illimitata nell'origine.

Un'altra condizione al contorno è che la membrana non si muova al confine del dominio perciò R(s) = 0 in s = λa . Questo implica che $J_n(\lambda a) = 0$ e questo si ha per un infinito numero di soluzioni $\lambda = \lambda_{ni}$.

Il valore $\lambda = \omega / c$ descrive la frequenza alla quale la membrana oscillerà.

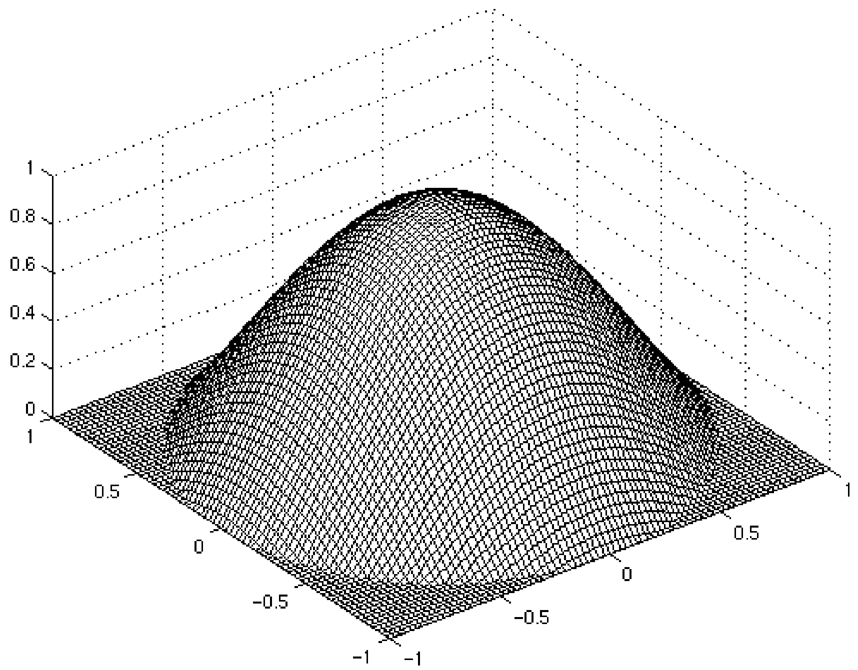
Avendo ricavato le soluzioni per Θ, R e τ la generica soluzione dell'equazione differenziale di partenza è del tipo:

$$z = J_n(\lambda_{ni} r)(A \cos n\vartheta + B \sin n\vartheta) e^{i\omega_i t}$$

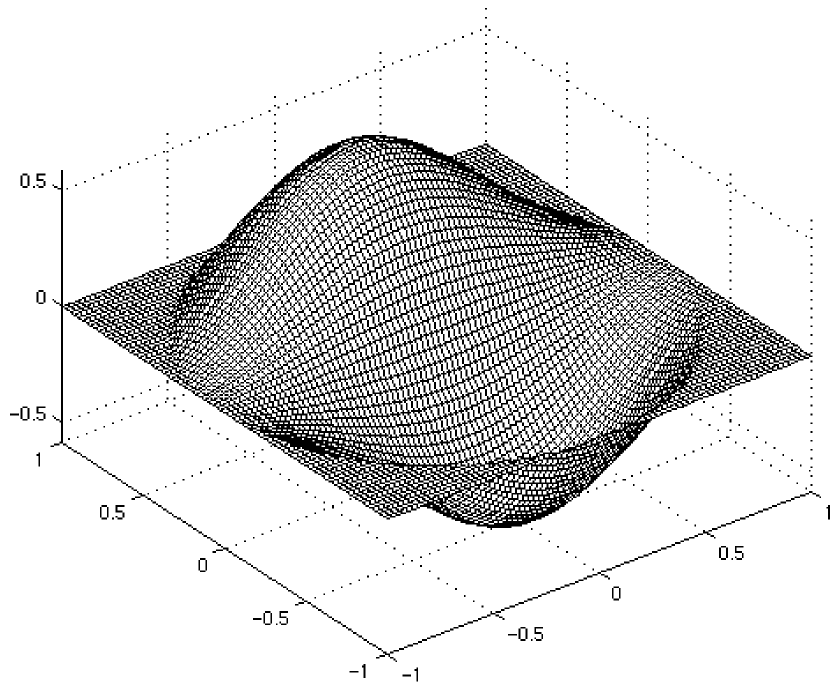
dove $\omega_i = c\lambda_{ni}$ e i valori di λ_{ni} sono soluzioni di $J_n(\lambda a) = 0$.

Le seguenti figure mostrano diversi tipi di oscillazioni della membrana elastica al variare di n nella funzione $J_n(\lambda_{ni} r)$.

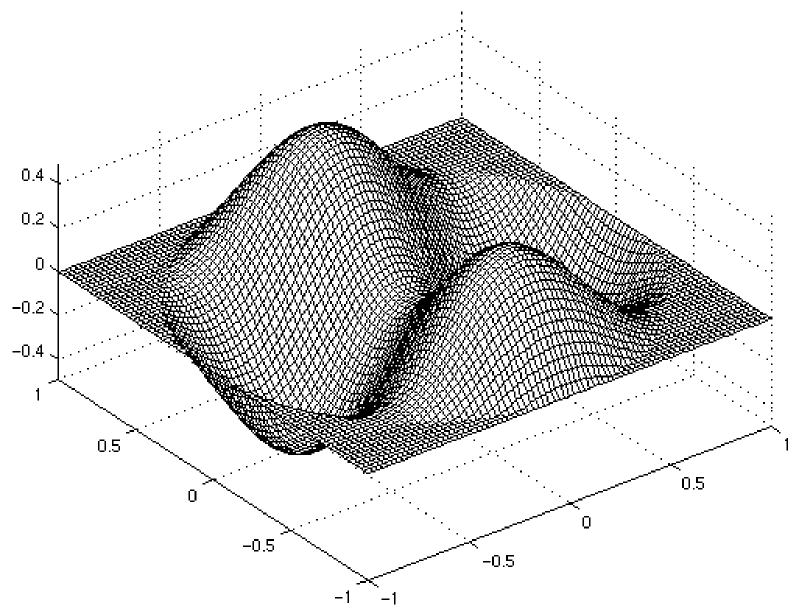
$J_0(\lambda_1 r)$



$J_1(\lambda_1 r)\cos\theta$



$J_2(\lambda_1 r)\cos 2\theta$



Si riprenda in esame il caso in cui si abbiano le seguenti condizioni iniziali:

$$z(r,\vartheta,0) = G(r,\vartheta)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

che descrivono la posizione della membrana all'istante t=0, cioè lo spostamento iniziale lungo l'asse z della membrana è nullo.
Considerando le oscillazioni della membrana come funzioni pari, si può considerare una soluzione proporzionale a $\cos(\omega_i t)$.
Perciò utilizzando la linearità dell'equazione dell'onda la generale forma dello spostamento della membrana è del tipo:

$$z(r,\vartheta,t) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} J_n(\lambda_{ni} r)(A_{ni}\cos n\vartheta + B_{ni}\sin n\vartheta)\cos\omega_i t$$

Usando la condizione iniziale, cioè nell'istante t = 0, si ricava

$$G(r,\vartheta) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} J_n(\lambda_{ni} r)(A_{ni}\cos n\vartheta + B_{ni}\sin n\vartheta).$$

Per trovare i coefficienti A_{ni} e B_{ni} bisogna far riferimento alla teoria sull'ortogonalità delle funzioni di Bessel, in particolare della relazione già sviluppata

$$\int_0^a xJ_\nu(\lambda x)J_\nu(\mu x)dx = \frac{a^2}{2}[J_\nu^{'}(\mu a)]^2\delta_{\lambda\mu}$$

e delle relazioni trigonometriche note

$$\int_0^{2\pi}\cos m\vartheta\cos n\vartheta d\vartheta = \int_0^{2\pi}\sin m\vartheta\sin n\vartheta d\vartheta = \pi\delta_{mn}$$

con m, n interi.

Si moltiplichi per cos$m\theta$ ambo i membri della nostra equazione di oscillazione della membrana e si integri da 0 a 2π . Si giunge così a:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos m\vartheta G(r,\vartheta)d\vartheta=\sum_{i=0}^{\infty}A_{mi}J_n(\lambda_{ni}r)$$

e facendo la stessa cosa con sin$m\theta$ si ottiene invece

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin m\vartheta G(r,\vartheta)d\vartheta=\sum_{i=0}^{\infty}B_{mi}J_n(\lambda_{ni}r)$$

Allora, utilizzando la formula della serie di Bessel-Fourier

$$C_j=\frac{2}{a^2[J_v^{'}(\lambda_j a)]^2}\int_0^a xJ_v(\lambda_j x)f(x)dx$$

per ricavare i coefficienti si ottengono:

$$A_{mj}=\frac{2}{a^2\pi[J_n^{'}(\lambda_j a)]^2}\int_{r=0}^a rJ_n(\lambda_j r)\int_0^{2\pi}\cos m\vartheta G(r,\vartheta)d\vartheta$$

e

$$B_{mj}=\frac{2}{a^2\pi[J_n^{'}(\lambda_j a)]^2}\int_{r=0}^a rJ_n(\lambda_j r)\int_0^{2\pi}\sin m\vartheta G(r,\vartheta)d\vartheta.$$

Per concludere si noti che nel caso in cui la funzione G(r,θ) sia pari i coefficienti B_{mj} sono nulli, viceversa quando la funzione è dispari i coefficienti A_{mj} sono nulli.

5. BIBLIOGRAFIA

A.C.King, J.Billingham, S.R.Otto, *Differential Equations (linear, nonlinear, ordinary, partial)*, Cambridge University Press (2003).

Prof. G.Porru, *Dispense di Analisi superiore 1*.

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bessel.html

Grafici :
Wikipedia (enciclopedia online);
www.vialattea.net