UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Alle origini del calcolo infinitesimale: il metodo dei massimi e minimi di Fermat

Relatore:
prof. Lucio Cadeddu

Tesi di Laurea di:
Giampaolo Lai

Anno Accademico 2007/2008

Credo che sia improbabile che l'ingegno umano possa inventare un enigma di cui lo stesso ingegno umano non possa, con paziente applicazione, venire a capo.

Edgar Allan Poe, *Lo scarabeo d'oro.*

Indice

Premessa

La difficoltà nella comprensione delle idee e dei concetti matematici spesso risiede nella loro astrattezza e nella lontananza da questioni pratiche, ma la storia della matematica ci mostra come spesso la risoluzione di problemi pratici ha portato all'invenzione di concetti matematici sempre più evoluti e sofisticati. E così oggi ci troviamo a dover studiare e capire in poco tempo ciò che eminenti matematici hanno elaborato in secoli di riflessioni e di calcoli.

Un problema che oggi è pienamente compreso, frequentemente sfruttato e descritto da appropriati strumenti matematici è il problema della ricerca dei massimi e dei minimi. Esso, nella didattica tradizionale, è abitualmente affrontato dopo che sono stati introdotti i concetti di funzione, di limite e di derivata; ma più di cinquecento anni fa è stato trattato in maniera sorprendentemente semplice e priva di ostacoli concettuali senza far riferimento a nessuno dei concetti matematici citati. È utile togliere un po' di ruggine a questo antico metodo che ha anticipato la nascita di idee cardine della matematica, per vedere come spesso i problemi formulati nel passato possono rendere più chiari i concetti che nel presente vengono espressi in maniera meno immediata e comprensibile a chi si avvicina alla matematica.

Introduzione

Il nome di Fermat è sicuramente legato al noto teorema che ha impegnato molti matematici per la sua dimostrazione, ma sicuramente molti ricordano, più che l'enunciato del teorema, il fatto che Fermat non abbia lasciato nessuna dimostrazione ma una semplice nota a margine in cui afferma che la dimostrazione è così lunga da non poter essere contenuta nel margine stesso [Boyer]. Notevole è anche il fatto che Fermat non fosse matematico di professione, ma svolgesse incarichi di tutt'altro genere e coltivasse anche interessi al di fuori della matematica; durante la sua vita non pubblicò quasi nulla delle sue scoperte matematiche. Molto meno noto dell'ultimo teorema di Fermat è il suo metodo per la ricerca dei massimi e dei minimi, descritto nel trattato, rimasto inedito durante la sua vita, dal titolo *Methodus ad disquirendam maximam et minimam.*

Nel 1665 Fermat muore a Castres, all'età di 64 anni, acclamato come il più grande "Geometra" d'Europa, ma non certo sulla base di opere in stampa. Prima di allora, nel 1660, aveva fatto stampare lui stesso solo una dissertazione geometrica, per di più anonima, come appendice di un volume pubblicato a Tolosa, dal padre gesuita Lalouvère, sulla cicloide. Gran parte dei lavori di Fermat sono citati nelle opere di Mersenne.

La più antica citazione di un'opera manoscritta di Fermat è proprio il *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*, contenuta in un'opera di Desargues stampata a Parigi nel 1640, che assegna a Fermat il merito di aver trovato una "bella maniera di trovare le tangenti alle curve".

Il metodo, sul quale peraltro si concentrò l'attenzione a causa di una polemica con Cartesio, fu citato anche da Herigone nel 1642. Finalmente nel 1679 il figlio Samuel Fermat pubblica un'edizione di opere nota come *Varia Opera Mathematica*, che contiene il nostro trattato.

Tutti gli opuscoli di Fermat sono in latino. Vi sono alcuni scritti in francese ma appartengono alla corrispondenza. Un certo numero di lettere, quelle più matematiche (o da lui ritenute tali), sono però nella lingua dei sapienti.

In quanto segue si esamineranno i punti essenziali del trattato di Fermat sui massimi e minimi, sintetizzando le idee che stanno alla base del metodo, illustrando gli esempi fondamentali, elaborando alcuni problemi che Fermat non ha esaminato a fondo e delineando gli sviluppi che avrebbero potuto avere le sue idee.

Capitolo 1

Sintesi del trattato

1.1 Descrizione del metodo

Seguiamo la descrizione del metodo con le parole di Fermat:

> "Ogni teoria sulla ricerca del massimo e del minimo si poggia sulla posizione di due incognite e della sola seguente regola. Si stabilisca che l'incognita di un certo problema sia A (una figura piana, solida o una lunghezza, a seconda del caso) e, espresso il massimo o il minimo in termini di A, per mezzo di qualsivoglia potenza, si ponga come nuova incognita A + E, e di nuovo si trovi il massimo o il minimo in termini di potenze di qualsiasi grado di A ed E. Si uguaglino, come dice Diofanto, le due espressioni del massimo o minimo e, eliminati i termini comuni (affinchè, fatto ciò, entrambe le espressioni contengano E o potenze di E), si divida ogni espressione per E o una sua potenza superiore, finchè almeno un termine delle espressioni, quella delle due che si vuole, sarà liberato del tutto dalla presenza di E. Si elidano poi entrambe le espressioni da E o da sue potenze superiori e si uguaglino le espressioni rimanenti, o, se da una parte non rimane nulla, si uguagli l'espressione negativa a quella positiva, che è lo stesso. La risoluzione di quest'ultima uguaglianza darà il valore di A, conosciuto il quale, il massimo o il minimo si ricaverà dall'espressione iniziale" [1].

[1] Cfr. testo originale [Fermat 1]: "Omnis de inventione maximæ et minimæ doctrina duabus positionibus in notis innititur et hac unica præceptione: Statuatur quilibet quæstionis terminus esse A (sive planum, sive solidum aut longitudo, prout proposito satisfieri par est) et, inventa maxima aut minima in terminis sub A, gradu aut gradibus, ut libet, involutis, ponatur rursus idem qui prius terminus esse A + E, iterumque inveniatur

In termini moderni, sia x l'incognita del problema e sia $f(x)$ la quantità da rendere massima o minima, espressa come funzione di x. Se si considera l'incognita x variata di una certa quantità e, la funzione f assumerà il valore $f(x+e)$. Ora, in corrispondenza del massimo (o del minimo), il valore della funzione non cambierà di molto. Quindi, dice Fermat, si uguaglino le due funzioni (usa il termine *adæquantur*), ma non sarà un'uguaglianza esatta, bensì approssimata. Dopo opportuni passaggi algebrici e dopo aver eventualmente semplificato per e l'espressione così ottenuta, si elimina e, e si risolve l'equazione nell'incognita x, il cui valore, sostituito alla funzione, darà il massimo o il minimo cercato.

1.2 Esempi

Seguiamo anzitutto, per comprendere meglio il metodo, alcuni semplici problemi che Fermat esamina a titolo di esempio.

Figura 1.1: Area del parallelogrammo

Dato il segmento $\overline{AC}$, trovare in esso un punto E in maniera tale che il prodotto $\overline{AE} \times \overline{EC}$ sia massimo,

ovvero trovare il rettangolo di area massima dato il perimetro.

Sia $\overline{AC} = b$ e sia a uno dei due segmenti; l'altro sarà $b-a$. Il prodotto di cui trovare il massimo sarà

$$a(b-a) = ab - a^2.$$

Supponiamo ora di variare a di una certa quantità e. In tal caso uno dei segmenti sarà $a+e$, l'altro sarà $b-a-e$ e il prodotto da rendere massimo sarà

$$(a+e)(b-a-e) = ab - a^2 + be - 2ae - e^2.$$

maxima aut minima in terminis sub A et E gradibus, ut libet, coefficientibus. Adæquantur, ut loquitur Diophantus, duo homogenea maximæ aut minimæ æqualia et, demptis communibus (quo peracto, homogenea omnia ex parte alterutra ab E vel ipsius gradibus afficiuntur), applicentur omnia ad E vel ad elatiorem ipsius gradum, donec aliquod ex homogeneis, ex parte utravis, affectione sub E omnino liberetur. Elidantur deinde utrimque homogenea sub E aut sub ipsius gradibus quomodolibet involuta, et reliqua æquentur, aut, si ex una parte nihil superest, æquentur sane, quod eodem recidit, negata affirmatis. Resolutio ultimae istius æqualitatis dabit valorem A, qua cognita, maxima aut minima ex repetitis prioris resolutionis vestigiis innotescet".

Ora uguagliamo le due espressioni:

$$ab - a^2 = ab - a^2 + be - 2ae - e^2;$$

eliminiamo i termini comuni:

$$0 = be - 2ae - e^2;$$

si divide tutto per e:

$$0 = b - 2a - e$$

e si ricava facilmente

$$b = 2a.$$

Si deve osservare che:

- occorre semplificare per e tutta l'espressione perché altrimenti si ottiene un'identità $0 = 0$;
- l'eliminazione di e, cioè porre $e = 0$, corrisponde a passare al limite per e che tende a zero, ma il concetto di limite ancora non esisteva, ecco perché è importante il metodo di Fermat;
- proprio perchè non era ancora stato inventato il concetto di limite, il metodo non ha successo con le funzioni trascendenti, anche se Fermat, applicando il metodo alla ricerca delle tangenti, riesce a esaminare anche curve trascendenti.

Trovare la tangente a una curva in un punto dato
(in particolare lo applica alla parabola).

L'idea di Fermat è che, data la tangente alla parabola in B condotta da un punto esterno E, preso un punto O sulla tangente, tale punto risulta esterno alla parabola, e quindi si può formulare la disuguaglianza

$$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{CD}} < \frac{\overline{OI}^2}{\overline{ID}} \text{ perché } \overline{OI} < \overline{FI}$$

essendo F il punto di intersezione del segmento $\overline{OI}$ con la parabola. Anche qui, prendendo come incognita $\overline{CE} = x$ e assumendo che la variazione dell'incognita sia $\overline{CI} = e$, si può considerare la disuguaglianza suddetta come una uguaglianza approssimata, che diventerà un'uguaglianza esatta dopo che si sono svolte le operazioni descritte sopra, cioè i passaggi algebrici, la semplificazione di e e l'annullamento di e.

Figura 1.2: Tangente alla parabola

1.3 Osservazioni sul metodo

Per stabilire la certezza del metodo, dice Fermat, prendiamo in considerazione un esempio tratto da un'opera di Apollonio:

> Data una retta $OMID$, dividere $\overline{MI}$ mediante un punto N in maniera tale che sia minimo il rapporto
> $$\frac{\overline{ON} \times \overline{ND}}{\overline{MN} \times \overline{NI}}$$

Questo problema di Apollonio, come riferisce Pappo, aveva *difficiles determinationes*, e la più difficile limitazione è che il rapporto di cui si deve determinare il minimo è unico, cioè che se si suppone per assurdo che vi siano due punti che soddisfano il problema dato, nella realtà si trova che solo uno sarà il punto che risolve il problema. Pappo assume come vera e non dimostra tale limitazione, da questa anzi trae altre conseguenze.

Anche Fermat, in realtà, si limita ad applicare questa considerazione senza fornire una spiegazione, e la applica, oltre al problema di Pappo citato, i cui dettagli qui omettiamo, alla ricerca delle tangenti all'ellisse.

Figura 1.3: Tangente all'ellisse

In riferimento alla figura (1.3), siano
$\overline{OZ} = b$
$\overline{ON} = g$
$\overline{OM} = a$ (incognita)

La retta IV incontra l'ellisse in un punto E. Si ha, per la proprietà dell'ellisse,

$$\frac{\overline{DO}^2}{\overline{EV}^2} = \frac{\overline{ZO} \times \overline{ON}}{\overline{ZV} \times \overline{VN}}. \tag{1.1}$$

Sia ora $\overline{OV} = e$. Si ha
$\overline{ZV} = b + e$
$\overline{VN} = g - e$
$\overline{VM} = a - e$ (incognita)
e quindi

$$\frac{\overline{ZO} \times \overline{ON}}{\overline{ZV} \times \overline{VN}} = \frac{bg}{(b+e)(g-e)} = \frac{bg}{bg - be + eg - e^2}$$

e, per la (1.1),

$$\frac{bg}{bg - be + eg - e^2} > \frac{a^2}{a^2 - 2ae + e^2}.$$

Dopo qualche passaggio si ottiene

$$bge - 2abg > -ba^2 + ga^2 - a^2e.$$

Ora si possono annullare i termini che contengono e, considerazione che equivale ad affermare che, avendo ipotizzato che esistano due soluzioni al problema, cioè a e $a + e$, solo uno in realtà deve essere il punto che soddisfa il problema. Si ottiene pertanto

$$ab - ag = 2bg$$

da cui si può ricavare l'incognita a.

1.4 Variante al metodo

Fermat propone una variante al metodo mediante un problema già trattato, quello in cui si vuole dividere un segmento dato b in due segmenti il cui prodotto sia massimo.

È chiaro che il punto che soddisfa la condizione richiesta è il punto medio, e quindi il massimo prodotto cercato sarà uguale a $\frac{b^2}{4}$. Nessun'altra coppia di segmenti avrà tale prodotto. Ma se si richiede di suddividere lo stesso segmento in due segmenti il cui prodotto sia uguale a una certa area z (non quella massima), si avranno due punti che soddisfano la condizione richiesta, che si troveranno a destra e a sinistra rispetto al punto che corrisponde al prodotto massimo. Sia a uno dei due segmenti in cui viene diviso arbitrariamente il segmento dato: dovrà essere $ab - a^2 = z$, che è un'equazione di secondo grado (Fermat la chiama *anceps*) e quindi prova che, nel caso il prodotto dei due segmenti non sia massimo, si hanno due soluzioni. Fermat ora propone la risoluzione di questa equazione (con un metodo che sembra aver tratto da Viète) come segue. Considerando l'equazione (detta da Fermat *correlata*) $eb - e^2 = z$ (praticamente a ed e sarebbero le due soluzioni che corrispondono alla stessa area z) e confrontando le due equazioni si ottiene

$$\begin{aligned} ab - a^2 &= eb - e^2, \\ ab - eb &= a^2 - e^2, \\ (a - e)b &= (a - e)(a + e), \\ b &= a + e. \end{aligned}$$

Se ora si prende al posto di z un'area maggiore, ma sempre minore della massima, i segmenti a ed e differiranno meno tra di loro, quindi al crescere del prodotto fra i due segmenti, diminuisce la differenza tra a ed e, differenza che si annulla quando si raggiunge la divisione che corrisponde al prodotto massimo.

Si applica questo metodo ai seguenti problemi.

> Dividere un segmento dato in due segmenti in maniera tale che il prodotto del quadrato di uno dei due per l'altro sia massimo.

Figura 1.4: Volume del parallelepipedo

Sia $\overline{AB} = b$ il segmento dato e sia $\overline{AC} = x$ una delle due parti che si ottiene dividendo arbitrariamente il segmento (quindi non la divisione che darebbe il prodotto massimo). Il prodotto in questione sarebbe il volume del parallelepipedo (cfr. fig. 1.4) che ha per base il quadrato di lato x e per altezza la parte rimanente $b - x$ del segmento assegnato. Tale volume è dato da

$$V = x^2(b - x) = bx^2 - x^3.$$

Si può considerare l'equazione *correlata*

$$V = be^2 - e^3$$

e confrontando le due equazioni che forniscono il volume si ottiene

$$\begin{aligned} bx^2 - x^3 &= be^2 - e^3, \\ bx^2 - be^2 &= x^3 - e^3, \\ b(x-e)(x+e) &= (x-e)(x^2 + ex + e^2), \\ bx + be &= x^2 + ex + e^2. \end{aligned}$$

Come sopra, ponendo $e = x$ si ottiene la suddivisione che fornisce il prodotto massimo richiesto:

$$2bx = 3x^2 \text{ ovvero } 2b = 3x.$$

Determinare il massimo della quantità $b^2x - x^3$.

Ora anzichè utilizzare la seconda incognita e nell'equazione *correlata*, usiamo l'incognita $(x + e)$:

$$b^2(x + e) - (x + e)^3 = b^2x + b^2e - x^3 - 2x^2e - 2xe^2 - e^3.$$

Confrontando le due equazioni si ottiene:

$$\begin{aligned} b^2x - x^3 &= b^2x + b^2e - x^3 - 3x^2e - 3xe^2 - e^3, \\ 3x^2e + 3xe^2 + e^3 &= b^2e. \end{aligned}$$

Dividendo per e e annullando i termini in cui rimane e si ottiene

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3xe + e^2 &= b^2, \\ 3x^2 &= b^2. \end{aligned}$$

Con questo metodo delle equazioni correlate Fermat riprende anche il problema di Pappo già risolto.

Fermat sottolinea che usare la tecnica delle equazioni correlate (cioè per intenderci scrivere due equazioni, una con l'incognita x e una con l'incognita e che poi vengono confrontate) potrebbe portare a complessità di calcolo perchè bisogna dividere le espressioni per un binomio, mentre quello che lui chiama secondo metodo, quello cioè di porre la seconda delle due equazioni con l'incognita $(x + e)$

> "fornirà abbondantemente ai più esperti Analisti una certamente mirabile facilità e innumerevoli scorciatoie."

1.5 Tangenti a curve famose

La teoria delle tangenti - dice Fermat - consente di risolvere molti problemi. Le curve di cui cerchiamo le tangenti hanno le loro proprietà caratteristiche esprimibili in termini di sole rette o in termini di altre curve complicate a loro volta da rette o altre curve. Il primo caso è stato già esaminato, ed è quello esemplificato dalla parabola, che è il luogo di punti del piano equidistanti dal fuoco e dalla direttrice. La proprietà caratteristica della parabola pertanto è esprimibile tramite una retta. Fermat esemplifica quello che lui chiama *primo caso* anche con la cissoide di Diocle e la concoide di Nicomede, ma si propone di applicare il metodo delle tangenti anche a curve la cui proprietà caratteristica è espressa in termini di altre curve, come la cicloide e la quadratrice di Dimostrato. In questi problemi sfrutta un'idea interessante: per applicare il suo metodo, dice [2], si possono prendere anzichè i punti sulla curva, quelli sulla tangente, concetto che in termini moderni si può tradurre dicendo che l'arco della curva si assimila alla tangente.

[2]Cfr. testo originale [Fermat 1]: "... jam inventam tangentem supponentes ad datum in curva punctum, proprietatem specificam curvæ, non in curva amplius, sed in invenienda tangente, per adæqualitatem consideramus et, elisis (quae monet doctrina de maxima et minima) homogeneis, fit demum æqualitas quae punctum concursus tangentis cum diametro determinat, ideoque ipsam tangentem."

> “Supponendo di aver già determinato la tangente alla curva in un dato punto, consideriamo la proprietà caratteristica della curva non sulla curva ma, tramite un'uguaglianza, sulla tangente da trovare e, eliminati i termini omogenei, si faccia di nuovo l'uguaglianza che determina il punto di intersezione della tangente col diametro, e pertanto la stessa tangente.”

1.5.1 Concoide di Nicomede

Fermat, dopo aver trovato la tangente alla cissoide, applica lo stesso metodo alla concoide di Nicomede, indicando però solo le linee essenziali del procedimento per non dilungarsi troppo. Effettivamente la procedura richiede lunghi e laboriosi calcoli, che sono qui di seguito illustrati.

La concoide di Nicomede (fig. 1.5) è il luogo geometrico dei punti P del piano tali che, dato un punto O, data una retta m con distanza d da O, data una retta passante per O che incontra m in un punto M, si abbia

$$\overline{PM} = k. \tag{1.2}$$

Figura 1.5: Concoide di Nicomede

Da questa proprietà si può ricavare l'equazione algebrica. Deve essere infatti, dalla (1.2),

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = k^2. \tag{1.3}$$

Ma $x_M = \overline{ON} = d$, mentre per esprimere y_M si può osservare che la retta OMP passa per l'origine e ha coefficiente angolare

$$m = \frac{y}{x} = \frac{y_M}{x_N},$$

e quindi si ha

$$y_M = \frac{y}{x} x_M = \frac{y}{x} d.$$

Sostituendo x_M, y_M nella (1.3) si otterrà l'equazione della curva:

$$(x^2 + y^2)(x - d)^2 = k^2 x^2. \tag{1.4}$$

Figura 1.6: Tangente alla concoide di Nicomede

Ciò premesso, in riferimento alla figura (1.6), sia E il vertice della curva, sia P il punto nel quale si vuole trovare la tangente, sia PA tale tangente, sia PC la parallela all'asse x e alla retta m assegnata. Per la definizione della curva, si ha $\overline{MP} = \overline{NE} = k$. Si prenda un punto D fra C e E e si conduca la retta parallela a CP. Tale retta incontrerà la tangente nel punto B. Si applichi ora la proprietà della curva alla tangente anzichè alla curva stessa: si dovrà unire B al polo O e la retta BO incontrerà la retta m in H e dovrà essere

$$\overline{HB} = \overline{NE} = k. \tag{1.5}$$

Sia l'incognita del problema $\overline{CA} = a$ (cioè la posizione della tangente cercata sull'asse y). Gli elementi noti saranno:
$\overline{EN} = z$ (per la proprietà della curva)
$\overline{ON} = d$ (per la proprietà della curva)
$\overline{PC} = y$ (ordinata del punto in cui si cerca la tangente)
$\overline{OC} = x$ (ascissa del punto in cui si cerca la tangente).
Sia inoltre
$\overline{CD} = e$.

Per poter applicare la (1.5) occorre esprimere $\overline{HB}$ in funzione delle quantità note e ciò può essere fatto dalla proporzione

$$\overline{HB} : \overline{ND} = \overline{OB} : \overline{OD}. \tag{1.6}$$

Ora, si può scrivere

$$\overline{ND} = \overline{NC} + \overline{CD} = \overline{OC} - \overline{ON} + \overline{CD} = x - d + e,$$

$$\overline{OD} = \overline{OC} + \overline{CD} = x + e,$$

$$\overline{OB} = \sqrt{\overline{DB}^2 + \overline{OD}^2};$$

per esprimere anche $\overline{OB}$ in funzione delle quantità note, dalla similitudine dei triangoli ACP, ADB si può scrivere la proporzione

$$\overline{DB} : \overline{AD} = \overline{PC} : \overline{CA},$$

e quindi ricavare (essendo $\overline{AD} = \overline{AC} - \overline{CD}$)

$$\overline{DB} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{PC}}{\overline{CA}} = \frac{(a-e)y}{a}$$

Si può scrivere quindi

$$\overline{OB} = \sqrt{\frac{(a-e)^2y^2}{a^2} + (x+e)^2},$$

e finalmente ricavare dalla (1.6)

$$\overline{HB} = \frac{\overline{ND} \cdot \overline{OB}}{\overline{OD}} = \frac{x-d+e}{x+e}\sqrt{\frac{(a-e)^2y^2}{a^2} + (x+e)^2}.$$

Ora si può applicare la (1.5):

$$\frac{x-d+e}{x+e}\sqrt{\frac{(a-e)^2y^2}{a^2} + (x+e)^2} = z.$$

Sviluppando i calcoli, che sarebbe tedioso riportare per intero, si ottiene

$$\begin{gathered} a^2x^2y^2 - 2aex^2y^2 + e^2x^2y^2 + a^2x^4 + 2a^2ex^3 + a^2e^2x^2 + \\ +a^2d^2y^2 - 2ad^2ey^2 + d^2e^2y^2 + a^2d^2x^2 + 2a^2d^2ex + a^2d^2e^2 + \\ +a^2e^2y^2 - 2ae^3y^2 + e^4y^2 + a^2e^2x^2 + 2a^2e^3x + a^2e^4 + \\ -2a^2dxy^2 + 4adexy^2 - 2de^2xy^2 - 2a^2dx^3 - 4a^2dex^2 - 2a^2de^2x + \\ +2a^2exy^2 - 4ae^2xy^2 + 2e^3xy^2 + 2a^2ex^3 + 4a^2e^2x^2 + 2a^2e^3x + \\ -2a^2dey^2 + 4ade^2y^2 - 2de^3y^2 - 2a^2dex^2 - 4a^2de^2x - 2a^2de^3 = \\ = a^2x^2z^2 + 2a^2exz^2 + a^2e^2z^2 \end{gathered} \tag{1.7}$$

Ora per applicare il metodo di Fermat per la ricerca delle tangenti si dovrebbe dividere tutto per e e annullare i termini in cui rimane e. Si osserva che non è possibile semplificare per e, e se si annullano i termini che contengono e si ottiene

$$a^2x^2y^2 + a^2x^4 + a^2d^2y^2 + a^2d^2x^2 - 2a^2dxy^2 - 2a^2dx^3 = a^2x^2z^2 \tag{1.8}$$

che con qualche semplificazione si può dimostrare essere equivalente alla (1.4). Nella (1.7), perciò, si possono eliminare i termini della (1.8), che è un'identità, e si ottiene

$$\begin{gathered} -2aex^2y^2 + e^2x^2y^2 + 2a^2ex^3 + a^2e^2x^2 + \\ -2ad^2ey^2 + d^2e^2y^2 + 2a^2d^2ex + a^2d^2e^2 + \\ +a^2e^2y^2 - 2ae^3y^2 + e^4y^2 + a^2e^2x^2 + 2a^2e^3x + a^2e^4 + \\ +4adexy^2 - 2de^2xy^2 - 4a^2dex^2 - 2a^2de^2x + \\ +2a^2exy^2 - 4ae^2xy^2 + 2e^3xy^2 + 2a^2ex^3 + 4a^2e^2x^2 + 2a^2e^3x + \\ -2a^2dey^2 + 4ade^2y^2 - 2de^3y^2 - 2a^2dex^2 - 4a^2de^2x - 2a^2de^3 = \\ = 2a^2exz^2 + a^2e^2z^2 \end{gathered}$$

Da qui, ora, si può applicare il metodo, dividendo tutto per e:

$$-2ax^2y^2 + ex^2y^2 + 2a^2x^3 + a^2ex^2 +$$

$$-2ad^2y^2 + d^2ey^2 + 2a^2d^2x + a^2d^2e +$$
$$+a^2ey^2 - 2ae^2y^2 + e^3y^2 + a^2ex^2 + 2a^2e^2x + a^2e^3 +$$
$$+4adxy^2 - 2dexy^2 - 4a^2dx^2 - 2a^2dex +$$
$$+2a^2xy^2 - 4aexy^2 + 2e^2xy^2 + 2a^2x^3 + 4a^2ex^2 + 2a^2e^2x +$$
$$-2a^2dy^2 + 4adey^2 - 2de^2y^2 - 2a^2dx^2 - 4a^2dex - 2a^2de^2 =$$
$$= 2a^2xz^2 + a^2ez^2.$$

Eliminando i termini che contengono e, si può facilmente ricavare

$$-2ax^2y^2 + 2a^2x^3 - 2ad^2y^2 + 2a^2d^2x + 4adxy^2 - 4a^2dx^2 +$$

$$+2a^2xy^2 + 2a^2x^3 - 2a^2dy^2 - 2a^2dx^2 = 2a^2xz^2.$$

$$a = \frac{y^2(x-d)^2}{2x^3 + xy^2 + d^2x - xz^2 - dy^2 - 3dx^2}.$$

1.5.2 Versiera di Agnesi

Come applicazione del metodo per la ricerca delle tangenti elaborato da Fermat, proviamo a studiare un'altra curva celebre, la versiera di Agnesi.

Data una circonferenza di raggio $2a$, una retta di equazione $y = 2a$ tangente alla circonferenza nel punto $C(0, 2a)$ e il fascio di rette con centro nell'origine degli assi, si consideri il luogo dei punti che hanno per ascissa quella dei punti di intersezione del fascio con la tangente alla circonferenza in C e per ordinata quella dei punti di intersezione del fascio con la circonferenza. L'insieme dei punti così ottenuti costituisce una curva detta versiera di Agnesi (1.7).

Figura 1.7: Versiera di Agnesi

Si voglia determinare la tangente alla curva in un suo punto P. La proprietà caratteristica della curva (cfr. fig. 1.8) è contenuta nella proporzione

$$\overline{OB} : \overline{BD} = \overline{PH} : \overline{PD} \tag{1.9}$$

da cui, ponendo
$\overline{BC} = b$

$\overline{OC} = d$
$\overline{PB} = x$,
si ha
$\overline{OB} = d - b$
$\overline{BD} = \sqrt{\overline{OB} \cdot \overline{BC}} = \sqrt{(d-b)b}$ (per il teorema di Euclide)
$\overline{PH} = \overline{BC} = b$
$\overline{PD} = \overline{PB} - \overline{BD} = x - \sqrt{bd - b^2}$
e quindi

$$\frac{d-b}{\sqrt{bd-b^2}} = \frac{b}{x - \sqrt{bd-b^2}}.$$

Sviluppando i calcoli si ottiene

$$x^2(d-b) = d^2 b \tag{1.10}$$

che è un'altra maniera di esprimere la proprietà (1.9).

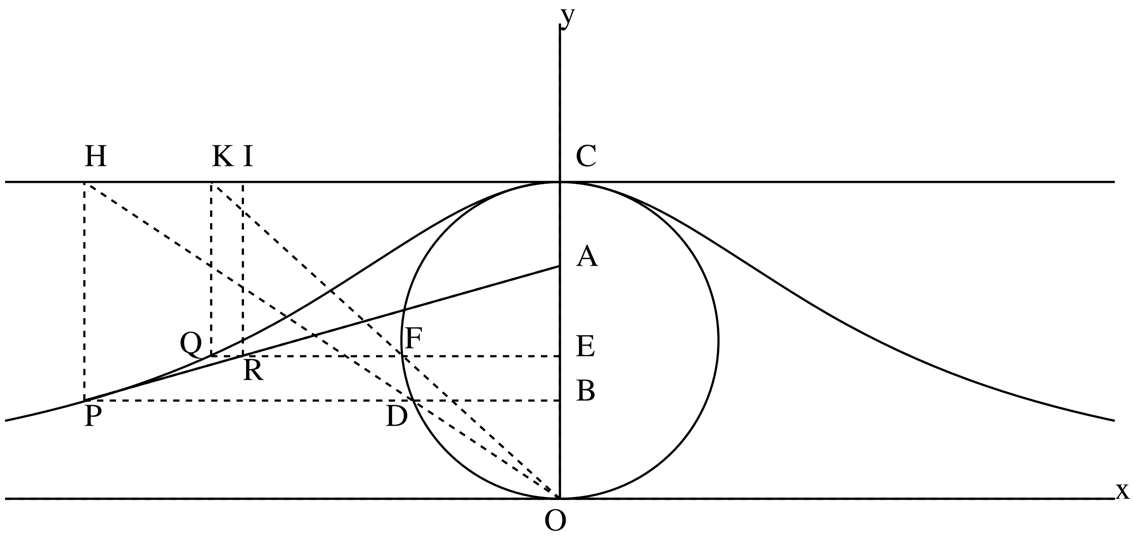

Figura 1.8: Tangente alla versiera

Ora secondo il metodo di Fermat immaginiamo di aver già tracciato la tangente alla curva in P, consideriamo un punto Q sulla curva molto vicino a P e il corripondente punto R sulla tangente già tracciata. Siano
$\overline{AB} = a$ (incognita)
$\overline{BE} = e$
$\overline{PB} = x$. Se la differenza e si annulla, i punti Q ed R coincideranno in P.

Proseguendo nell'applicazione del metodo, si applichi la proprietà caratteristica della curva alla tangente anziché alla curva. Si dovrà scrivere dunque la proporzione

$$\overline{OE} : \overline{EF} = \overline{RI} : \overline{RF}. \tag{1.11}$$

Si ha anzitutto, per il teorema di Euclide,

$$\overline{EF} = \sqrt{\overline{OE} \cdot \overline{CE}}$$

e poichè
$\overline{CE} = \overline{BC} - \overline{BE} = b - e$
$\overline{OE} = \overline{OC} - \overline{CE} = d - b + e$
si può scrivere

$$EF = \sqrt{(d - b + e)(b - e)}.$$

Si ha poi

$$\overline{RF} = \overline{ER} - \overline{EF}$$

ma

$$\overline{ER} = \frac{\overline{AE} \cdot \overline{PB}}{\overline{AB}}$$

e poichè
$\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{BE} = a - e$
si ha

$$\overline{ER} = \frac{(a - e)x}{a}$$

e quindi si può scrivere

$$\overline{RF} = \frac{(a - e)x}{a} - \sqrt{(d - b + e)(b - e)}.$$

Si ha infine

$$\overline{RI} = \overline{CE}$$

e perciò sostituendo tutto nella (1.11) si ottiene

$$\frac{d - b + e}{\sqrt{(d - b + e)(b - e)}} = \frac{b - e}{\frac{(a-e)x}{a} - \sqrt{(d - b + e)(b - e)}}. \tag{1.12}$$

Seguono i calcoli:

$$(d - b + e)[\frac{(a - e)x}{a} - \sqrt{(d - b + e)(b - e)}] = (b - e)\sqrt{(d - b + e)(b - e)}$$

$$\frac{x(a - e)(d - b + e)}{a} - (d-b+e)\sqrt{(d - b + e)(b - e)} = (b-e)\sqrt{(d - b + e)(b - e)}$$

$$\frac{x(a - e)(d - b + e)}{a} = (b - e + d - b + e)\sqrt{(d - b + e)(b - e)}$$

$$x(a-e)(d-b+e) = ad\sqrt{(d-b+e)(b-e)}$$
$$x^2(a-e)^2(d-b+e)^2 = a^2d^2(d-b+e)(b-e)$$
$$x^2(a-e)^2(d-b+e) = a^2d^2(b-e)$$
$$(a^2-2ae+e^2)(dx^2-bx^2+ex^2) = a^2d^2b - a^2d^2e$$
$$a^2dx^2-a^2bx^2+a^2ex^2-2aedx^2+2aebx^2-2ae^2x^2+de^2x^2-be^2x^2+e^3x^2 = a^2d^2b-a^2d^2e.$$

Tenendo presente la (1.10) si ottiene

$$a^2ex^2-2aedx^2+2aebx^2-2ae^2x^2+de^2x^2-be^2x^2+e^3x^2 = -a^2d^2e.$$

Ora si può dividere tutto per e ottenendo

$$a^2x^2-2adx^2+2abx^2-2aex^2+dex^2-bex^2+e^2x^2 = -a^2d^2$$

e si possono eliminare i termini contenenti e, ottenendo

$$a^2x^2-2adx^2+2abx^2 = -a^2d^2$$
$$ax^2-2dx^2+2bx^2 = -ad^2$$
$$ax^2+ad^2 = 2dx^2-2bx^2$$
$$a = \frac{2dx^2-2bx^2}{x^2+d^2}.$$

Ricavando a si ottiene la posizione della tangente cercata in funzione delle altre quantità note.

1.6 Punti di flesso

Fermat conclude questa parte dedicata alle tangenti con un'interessante procedura per trovare i punti di flesso. Il metodo si basa su questa considerazione: l'angolo formato dalla tangente a una curva in un suo punto di flesso con l'asse y è minimo. Applicando perciò il metodo dei massimi e minimi a tale angolo, si può trovare il flesso. Trovare ad esempio i punti di flesso della funzione

$$y = x^3 + 2x^2 - 1.$$

Figura 1.9: Punto di flesso

Sia F il flesso e A il punto di intersezione della tangente alla curva in F con l'asse y. Sia H un punto qualunque della curva. Per ogni H si ha (fig. 1.9)

$$\widehat{FAC} < \widehat{HBC}.$$

In corrispondenza del flesso l'angolo formato dalla tangente a F con l'asse y è minimo. Si ha cioè

$$\frac{\overline{FC}}{\overline{AC}} < \frac{\overline{HD}}{\overline{BD}}.$$

Perciò il rapporto da rendere minimo è $\frac{\overline{HD}}{\overline{BD}}$, dove B è l'intersezione della tangente alla curva in H con l'asse y. Occorre come prima cosa trovare BD, e lo si può fare sempre col metodo di Fermat.

Figura 1.10: Ricerca della tangente al grafico

Si consideri dunque un punto I sulla tangente BH (fig. 1.10). La parallela all'asse x passante per I incontra la curva in un punto K. Per la similitudine dei triangoli BLI, BDH si ha

$$\overline{BD} : \overline{HD} = \overline{BL} : \overline{IL}.$$

Ma $\overline{KL} > \overline{IL}$ e quindi

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{HD}} > \frac{\overline{BL}}{\overline{KL}}.$$

Ora si deve esprimere questa disuguaglianza mediante i dati. Si ha
$\overline{BD} = a$ (incognita)
$\overline{HD} = x$
$\overline{OL} = y$ (ordinata del punto I e del punto K)
$\overline{KL} = x + e$ (ordinata del punto K).

$$\overline{BL} = \overline{OL} - \overline{OB} = \overline{OL} - (\overline{OD} - \overline{BD}) = \overline{OL} - \overline{OD} + \overline{BD} = y_K - y_H + a =$$
$$= (x+e)^3 + 2(x+e)^2 - 1 - x^3 - 2x^2 + 1 + a =$$
$$= x^3 + 3x^2e + 3xe^2 + e^3 + 2x^2 + 4xe + 2e^2 - 1 - x^3 - 2x^2 + 1 + a =$$
$$3x^2e + 3xe^2 + e^3 + 4xe + 2e^2 + a.$$

Deve essere quindi

$$\begin{array}{rcl}
\frac{a}{x} & > & \frac{3x^2e+3xe^2+e^3+4xe+2e^2+a}{x+e} \\
ax + ae & > & 3x^3e + 3x^2e^2 + e^3x + 4x^2e + 2e^2x + ax \\
ae & > & 3x^3e + 3x^2e^2 + e^3x + 4x^2e + 2e^2x \\
a & > & 3x^3 + 3x^2e + e^2x + 4x^2 + 2ex \\
a & = & 3x^3 + 4x^2.
\end{array}$$

Ora si può esprimere il rapporto che deve essere minimo:

$$\frac{\overline{HD}}{\overline{BD}} = \frac{x}{3x^3 + 4x^2} = \frac{1}{3x^2 + 4x}.$$

Sostituendo x con $x + e$ dovrà essere

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4x &\approx 3(x+e)^2 + 4(x+e) \\ 3x^2 + 4x &\approx 3x^2 + 6ex + 3e^2 + 4x + 4e \\ 6ex + 3e^2 + 4e &\approx 0 \\ 6x + 3e + 4 &\approx 0 \\ 6x + 4 &= 0 \\ x &= -\tfrac{2}{3}. \end{aligned}$$

Si ottiene così la posizione del punto di flesso, come si può anche verificare applicando il metodo in uso ai giorni nostri.

Con analoghe considerazioni, dice, si possono determinare gli asintoti.

1.7 Sviluppi

Fermat fu una personalità invidiabile. Lo possiamo immaginare, pacifico ma acuto, mentre nei ritagli di tempo rimasti liberi dalla sua attività di Consigliere del parlamento di Tolosa si faceva venire idee matematiche brillanti e innovative senza preoccuparsi della fama che poteva derivargliene, visto che non si è dato da fare per pubblicare i suoi risultati. Dalle sue opere traspare una sottile ironia che non può non renderlo simpatico. Ma al di là di queste considerazioni poco scientifiche, è indubbio il merito che ha avuto, anche se la storia ha deciso altrimenti, e oggi siamo qui per restituirgli parte di quel merito, non tanto per il gusto di togliere la polvere del tempo dalle sue idee ma soprattutto per riflettere sulla validità che possono avere da un punto di vista strettamente matematico ma anche più in generale didattico i suoi metodi. Non potrebbe forse rendere la matematica un po' più attraente lo studio di questo metodo e la sua applicazione ai casi pratici? Di un metodo, si intende, che è semplice da capire, agevole (almeno in linea di principio) nella sua applicazione, potente nel raggiungimento dei risultati.

Ma la Storia, si diceva, ha deciso altrimenti. È ad altri che spetta l'onore di fare da padri (ufficiali) del calcolo differenziale. Decisamente più a nord della città di Tolosa, nell'anno accademico 1665-1666, mentre infuriava la peste, Isaac Newton fu costretto a ritirarsi a casa per evitare il contagio e in quei mesi elaborerà i fondamenti del calcolo infinitesimale. Nel 1669 compone il *De analysi per æquationes numero terminorum infinitas* (pubblicato nel 1611), che contiene le sue ricerche sulle serie infinite. Del 1671 è il *Methodus fluxionum et serierum infinitorum* (pubblicato nel 1742), dove parla di *fluenti*, quantità "che scorrono" (le nostre funzioni) e *flussioni*, le velocità con cui variano le flussioni, cioè le nostre derivate. Nel 1676 compone la terza esposizione del suo calcolo infinitesimale, dal titolo *De quadratura curvarum*, dove introduce il metodo delle "prime e ultime ragioni", cioè di rapporti che svaniscono, utilizzando concetti che molto si avvicinano all'idea di limite. Nel noto trattato *Philosophiae naturalis principia mathematica* del 1687, oltre a comparire un tentativo di definizione del limite di una funzione, consolida i suoi elementi di calcolo infinitesimale fornendo algoritmi di derivazione simili a quelli odierni.

Nel frattempo, intorno al 1673, Leibniz intuiva che la determinazione della tangente a una curva dipendeva dal rapporto fra le differenze delle ordinate e delle ascisse quando queste diventavano infinitamente piccole, e che le quadrature (cioè i calcoli di aree) si potevano esprimere in termini dei rettangoli infinitamente piccoli che formavano l'area. Fu Leibniz a introdurre i simboli dx e dy per indicare le minime variazioni possibili di x e y e il simbolo $\int ydx$ per indicare la somma dei rettangoli infinitesimi che compongono un'area. La prima esposizione del suo calcolo differenziale fu pubblicata da Leibniz nel 1684 col titolo *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur.*

È facile capire che per le numerose pubblicazioni di tali matematici il contributo di Fermat agli sviluppi del calcolo differenziale sia stato oscurato. Ma è indubbio che il suo metodo per la ricerca dei massimi e minimi si basa, anche se non lo richiama esplicitamente, su un concetto di derivata di una funzione e che nella sua ricerca delle tangenti fa uso di variazioni infinitesime di variabili, concetto che sta alla base dell'analisi.

Capitolo 2

Disputa con Cartesio

È interessante osservare che, sebbene Fermat non si sia occupato di mettere per iscritto i suoi lavori, sia stato protagonista di una fitta corrispondenza. Nelle conversazioni tra i suoi amici di penna si ritrovano le radici di una disputa (matematica) con un mostro sacro. Tale disputa, esaminando la corrispondenza di Fermat [Fermat 2], sembra trarre origine dai commenti sfavorevoli che egli ebbe nei confronti della *Dioptrique* di Cartesio. Lo stesso Cartesio replica a questi commenti in una lettera a Mersenne [1] e approfitta per vendicarsi criticando il Metodo dei Massimi e Minimi di Fermat che Mersenne gli aveva inviato:

> Mi riuscirebbe più semplice tacere sullo scritto che mi avete inviato, poichè non saprei dire niente a vantaggio di colui che lo ha composto. Ma ho capito che è la stessa persona che ha criticato la mia *Dioptrique* e che voi mi mandate ciò che egli ha inviato dopo aver letto la mia *Geometria* ed essersi meravigliato che io non abbia ottenuto gli stessi risultati. Penso di interpretare, quindi, che egli abbia intenzione di entrare in concorrenza e mostrare che lui ne sa più di me. Inoltre apprendo dalle vostre lettere che egli ha fama di essere molto sapiente in geometria. Per tutti questi motivi credo di essere obbligato a rispondergli.

Figura 2.1: Tangente alla parabola

Cartesio sostiene anzitutto di aver rilevato un errore nel metodo di Fermat, relativamente all'esempio che fornisce per trovare le tangenti alla parabola. In riferimento alla figura 2.1, dal punto B si conduca la retta BE che

[1] Lettera di Cartesio a Mersenne del 18 gennaio 1638.

incontra l'asse DC in E in maniera tale che il segmento $\overline{BE}$ sia il più grande che si possa condurre dal punto E alla parabola. Sia $\overline{EC} = a$ e si trovi il massimo (cioè $\overline{BE}$) in termini di a e delle sue potenze di qualsiasi grado, come previsto dal metodo di Fermat. Se si pone $\overline{BC} = b$ e $\overline{CD} = d$, si ha anzitutto $\overline{BE}^2 = a^2 + b^2$.

Per la proprietà della parabola si può scrivere

$$\overline{BC}^2 : \overline{CD} = \overline{OI}^2 : \overline{ID}$$

(dove si applica la proprietà caratteristica della parabola non al punto F sulla curva ma al punto O sulla tangente). Si ha quindi

$$\overline{OI}^2 = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{CD}} \cdot \overline{ID}$$

e perciò

$$\overline{OI}^2 = \frac{b^2}{d} \cdot \overline{ID}.$$

Se ora al posto di a prendiamo $a+e$ (o $a-e$, che è lo stesso dal punto di vista del procedimento) si deve esprimere di nuovo il massimo (cioè sempre $\overline{BE}$) in termini di qualsiasi grado di a e e. Poichè ora si ha $\overline{IE} = a+e$ e $\overline{DI} = d+e$, diventa

$$\overline{OI}^2 = \frac{b^2}{d}(d+e),$$

$$\overline{OE} = \overline{IE}^2 + \overline{OI}^2 = a^2 + 2ae + e^2 + b^2 + \frac{b^2}{d}(d+e)$$

Bisogna ora uguagliare le due quantità massime, cioè i due valori del segmento di tangente ottenuti prima con a e poi con $a+e$:

$$a^2 + b^2 = a^2 + 2ae + e^2 + b^2 + \frac{b^2}{d}(d+e)$$

da cui si ottiene, applicando il procedimento solito (cioè dividendo tutto per e e eliminando i termini che contengono e),

$$2a + \frac{b^2}{d} = 0.$$

Da qui non si ottiene il valore di a, come assicura Fermat, e perciò la sua regola è falsa.

Cartesio poi osserva che nello stesso esempio della parabola Fermat conduce il suo ragionamento come se la parabola non fosse essenziale, cioè che se sostituisse al termine *parabola* il termine *iperbole* o qualsiasi altra curva, niente cambierebbe.

Tutto ciò porta a concludere che

> il suo metodo (o meglio ciò che egli crede che sia) è tale che senza industria e per caso si può facilmente cadere nella strada che bisogna seguire per trovare il risultato, metodo che non è altro che una posizione falsa fondata sul modo di dimostrare che riduce all'impossibile [oggi diremmo per assurdo] e che è il meno apprezzato e il meno ingegnoso di tutti quelli di cui si serve la matematica. Il mio metodo invece è basato sulla conoscenza della natura delle equazioni che, per quanto ne so, non è stata mai spiegata se non nel terzo libro della mia Geometria; ne segue che non avrebbe potuto essere stato inventato da una persona che ignorasse i fondamenti dell'algebra e segue il più nobile modo di dimostrare che possa esistere, quello a priori.

Successivamente Mersenne informerà Fermat che Roberval e Etienne Pascal hanno prodotto una memoria a difesa del suo metodo (oggi perduta), e Fermat replica con alcuni brevi chiarimenti, che andranno senz'altro diretti a Cartesio tramite Mersenne. Ma il grosso della polemica giunge in una seconda lettera di Cartesio a Mersenne [2], dove, tra l'altro, Cartesio propone un altro esempio in cui il metodo di Fermat non funziona.

Figura 2.2: Tangente alla circonferenza

Data la circonferenza BDN ed il punto E esterno, da questo si conduca una retta in maniera tale che la parte di questa retta che sarà al di fuori della circonferenza, tra questa e il punto dato E, sia la più grande. Dopo aver condotto una retta EDN passante per il centro del cerchio, e dopo aver posto $\overline{ED} = b$ e il diametro $\overline{DN} = c$, si prenda $\overline{BC}$ perpendicolare a $\overline{DN}$ e sia $\overline{CD} = a$. Si deve fare in modo che $\overline{BE}$ sia massimo. Dalla proporzione

$$CD : BC = BC : CN$$

si ha anzitutto

$$\overline{BC}^2 = ac - a^2.$$

Inoltre

$$\overline{CE}^2 = (\overline{ED} + \overline{DC})^2 = (b + a)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\overline{BE}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{DC}^2 = a^2 + 2ab + b^2 + ac - a^2 = 2ab + b^2 + ac. \qquad (2.1)$$

Ora sia $\overline{CD} = a + e$. Si ottiene

$$\overline{BC}_1^2 = (a + e)c - (a + e)^2 = ac + ec - a^2 - 2ae - e^2$$

[2]Lettera di Cartesio a Mersenne del 3 maggio 1638

$$\overline{CE}_1^2 = (a+e)^2 + 2(a+e)b + b^2 = a^2 + 2ae + e^2 + 2ab + 2eb + b^2$$

$$\overline{BE}_1^2 = \overline{CE}_1^2 + \overline{BC}_1^2 = ac + ec + 2ab + 2eb + b^2. \qquad (2.2)$$

Uguagliando le due quantità che dovrebbero essere massime, cioè la (2.1) e la (2.2), si ottiene:

$$2ab + b^2 + ac = ac + ec + 2ab + 2eb + b^2$$

cioè

$$c + 2b = 0$$

che non dà la soluzione cercata.

Cartesio poi applica un suo metodo, per così dire algebrico (come è ovvio, giacché egli è il fondatore della geometria analitica) e giunge alla soluzione. In particolare, partendo dall'idea di Fermat di chiamare l'incognita prima a e poi $a+e$, ottiene con una similitudine tra triangoli un'equazione di secondo grado nella quale, come si direbbe oggi, imponendo che il Δ sia nullo si ottiene la soluzione.

Queste, in sintesi, alcune obiezioni di Cartesio. Il dibattito continua per corrispondenza. Questa volta è Fermat stesso che replica al suo illustre collega [3].

Anzitutto Fermat osserva che Cartesio, nonostante le sue critiche, ha accettato il suo metodo per la ricerca delle tangenti, poichè, più che correggerne errori, ne fornisce chiarimenti, almeno secondo le sue intenzioni. Resta da chiarire, dice Fermat, come questo metodo per la ricerca delle tangenti si basi sul metodo dei massimi e minimi e non su altri concetti che Cartesio accusa di aver dato per scontati e che invece compaiono nella sua *Geometria*.

Si vuole risolvere il seguente problema (si può fare riferimento sempre alla figura 2.2): condurre da E un segmento $\overline{EB}$ fino alla circonferenza in maniera tale che sia il più grande che dal punto E possa essere condotto senza intersecare la circonferenza (si cerca cioè la tangente). Prendendo $\overline{CD} = a$ e il segmento $\overline{EB}$ come il massimo da cercare, si ottiene un'equazione impossibile, da cui Cartesio, come si è visto, deduce che il metodo non funziona. Fermat risponde che non ha senso prendere $\overline{EB}$ come il più grande, limitazione che invece assegna Cartesio. Il problema, invece, può essere molto più facilmente risolto come segue.

Poichè $\overline{EB}$ tocca il cerchio, tale segmento sta alla perpendicolare $\overline{BC}$ in proporzione minore di quanto qualunque altro segmento condotto da E al cerchio, dall'una e dall'altra parte rispetto ad B, non stia a $\overline{BC}$. Non si deve dunque cercare il massimo di $\overline{EB}$, ma un punto B sulla circonferenza tale

[3] Lettera di Fermat a Mersenne del giugno 1638.

che il rapporto $\overline{EB} : \overline{BC}$ sia minimo. Trovato così il punto B, si conoscerà la tangente.

L'errore di Cartesio, in sostanza, rileva Fermat, è quello di ridurre la ricerca della tangente a un segmento che deve essere massimo. Il problema deve invece essere ricondotto, in base alle caratteristiche della curva in esame, alla ricerca di un particolare rapporto che deve essere reso minimo. E con ciò Fermat risponde anche all'obiezione in base alla quale il metodo di Fermat non prende in considerazione la proprietà caratteristica della curva in esame.

Ma c'è di più. A beneficio del suo interlocutore, Fermat compone un allegato dal titolo *Metodo dei massimi e minimi spiegato e inviato da Fermat a Cartesio.* Il metodo in verità era già abbastanza chiaro, come si è potuto leggere fino ad ora anche in questa modesta sintesi, e in effetti Fermat aggiunge poco ai fondamenti teorici del suo metodo, solo lo espone con una maggior dovizia di particolari e chiarimenti.

Figura 2.3: Tangente alla parabola

Un'importante osservazione è che Fermat (ri)descrive il suo metodo partendo dalla parabola ma estendendolo poi a una curva generica. Condotta la tangente in A alla curva da un punto esterno D, è ovvio che il punto E, stando sulla tangente, sarà fuori dalla curva e quindi $\overline{EF}$ sarà maggiore o minore del segmento che dalla curva giunge allo stesso punto F dell'asse (nel nostro caso $\overline{IF}$). In particolare sarà maggiore se la curva è convessa come in questo caso, sarà minore se la curva è concava. Il metodo infatti si adatta a ogni tipo di curve e consente di determinarne anche la concavità, tramite la proprietà della curva stessa. Sebbene $\overline{EF}$ sia diverso da $\overline{IF}$, Fermat, come è noto, lo considera come se in effetti fosse uguale, e in seguito lo confronta con $\overline{IF}$ tramite *adæquatio*, seguendo la proprietà caratteristica della curva.

Figura 2.4: Tangente a una curva generica

Ma per sottolineare in che modo il metodo può essere applicato alla ricerca delle tangenti, Fermat considera il seguente esempio. Dato il punto A, bisogna far ricorso non al massimo (perchè si troverebbe l'infinito, come si vedrà fra poco) ma al minimo. Si deve infatti cercare (cfr. fig. 2.4) il punto O sull'asse tale che $\overline{OA}$ sia il minore che si possa condurre da O alla curva. Trovato O col metodo, si conduca $\overline{AD}$ perpendicolare a $\overline{OA}$. Fermat dimostra che se $\overline{OA}$ è il minimo e $\overline{AD}$ è perpendicolare a $\overline{OA}$, $\overline{AD}$ sarà tangente alla curva, mediante una dimostrazione per assurdo, che omettiamo. Ora, se la curva assegnata ha la concavità verso il basso, sia $\overline{DA}$ la tangente sulla quale si conduce la perpendicolare $\overline{OA}$. Appare dalla costruzione che $\overline{OA}$ è la più corta di tutte quelle che da O sono condotte alla curva, in maniera tale che cercando O e essendo assegnato A si trova agevolmente la tangente. Rimane perciò solo da cercare il punto O col metodo solito.

Il metodo dunque, sostiene Fermat, ha il suo fondamento. Difficoltà possono sorgere dal punto di vista dei calcoli, ma seguendo la strada tracciata nell'esempio della parabola si può vedere come il metodo proceda con facilità e perfezione.

Non si sa se i chiarimenti di Fermat siano stati convincenti, o se siano intervenuti a placare gli animi i mediatori della corrispondenza o se semplicemente Cartesio abbia deciso di esercitare l'invidiabile dote della diplomazia. Fatto sta che il geometra analitico per eccellenza risponde così a Fermat [4]:

> "Non ho avuto meno gioia di ricevere la vostra lettera nella quale mi fate il favore di promettermi la vostra amicizia di quanto ne avrei avuta se mi fosse giunta da parte di una signora di cui avessi passionalmente desiderato le buone grazie. E i vostri altri scritti che hanno preceduto mi fanno ricordare la Bradamante dei nostri poeti, che non voleva ricevere come servitori delle persone che non si fossero preventivamente battute con lei. Non mi voglio tuttavia paragonare a quel Ruggiero che è stato il solo capace di resisterle; ma tale quale io sono, vi assicuro che onoro estremamente il vostro merito. E vedendo la vostra ultima maniera che avete usato per trovare le tangenti alle curve, non ho altro da rispondervi se non che essa è molto buona e che, se l'aveste spiegata all'inizio in questo modo, non vi avrei potuto contraddire."

Non concede però l'ultima parola, perchè dice di non vedere ancora per quale motivo il metodo per la ricerca dei massimi e minimi si possa applicare alla ricerca delle tangenti considerando la tangente come la perpendicolare al raggio piuttosto che considerando la tangente come la più grande sotto certe condizioni. Ma in effetti, concede Cartesio,

> "[...] è impossibile comprendere tutti i casi che possono essere proposti nei termini di una sola regola, se non ci si riserva la libertà di cambiare qualcosa all'occorrenza, come ho fatto in ciò che ho scritto, dove non mi sono assoggettato ai termini di alcuna regola ma ho solo spiegato il fondamento del mio procedimento e ne ho dato qualche esempio, affinchè ciascuno la applicasse poi, a seconda della necessità, ai diversi casi."

[4] Lettera di Cartesio a Fermat del 27 luglio 1638.

Chiaro riferimento alla sua *Geometria*.

Capitolo 3

Conclusioni

Esaminare gli scritti di Fermat è come una caccia al tesoro. Non sempre egli porta a termine i problemi che pone. A volte fornisce le linee generali del procedimento, a volte rende esplicita solo l'idea che funge da chiave risolutiva, a volte invece lascia al lettore solo il problema da risolvere, o come sfida per i suoi rivali, o promettendo di trattarlo in seguito. Ma in quest'ultimo caso, preso da tanti interessi, evidentemente dimentica i problemi che egli stesso pone, poichè non se ne trova più traccia negli scritti che ci rimangono. E così i problemi vengono sepolti dalle sabbie del tempo e per noi che li riscopriamo ora risulta abbastanza arduo ricostruire il suo modo di ragionare. È il caso ad esempio del problema degli asintoti. Dopo aver fornito il metodo per trovare i punti di flesso, perfettamente funzionante, Fermat dice:

> A coronamento possono anche essere trovati gli asintoti di una curva, che mostrano mirabili proprietà nel caso di curve non limitate [1].

È un vero peccato che Fermat non abbia mai ripreso questo argomento o, se anche lo ha fatto, niente ci sia rimasto (effettivamente dice [Fermat 1] di aver mandato a Roberval un esempio di ricerca di asintoti, ma nella corrispondenza che ci è rimasta non se ne trova traccia). Oggi, partendo dal suo metodo dei massimi e minimi e con una buona dose di pazienza, potremmo forse trovare la strada per giungere agli asintoti come vi è giunto lui, ma non saremmo in ogni caso sicuri che è la stessa strada da lui percorsa. Anzi, per la verità non siamo proprio sicuri di giungervi, visti i precedenti nei tentativi di dimostrare il Grande Teorema di Fermat, risolti solo recentemente. E così non potremo mai sapere quali sono le meravigliose proprietà delle curve infinite che aveva scoperto.

[1] Sed et coronidis loco possunt etiam et, data curva, inveniri ipsius asymptoti, quæ in curvis infinitis miras exhibent proprietates.

L'esame degli scritti di Fermat è come una miniera. Da un problema spesso ne scaturisce un altro e da una semplice lettera della sua corrispondenza spesso si possono leggere righe dense di matematica. Ma tutto ciò esula dagli spazi e dai tempi del presente lavoro, dove si è esaminata la validità del metodo per la ricerca dei massimi e minimi e la sua applicazione alla ricerca delle tangenti e dei punti di flesso, per assegnare a Fermat un posticino accanto ai fondatori del calcolo infinitesimale.

Bibliografia

[Boyer] Boyer Carl B., *Storia della matematica*, Milano, Mondadori, 1990.

[Castelnuovo] Castelnuovo Guido, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*, Milano, Feltrinelli, 1962.

[Fermat 1] *Œuvres de Fermat* publiées par le soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry, Paris, Gauthier-Villars et Fils, MDCCCXCI - Tome premier (Œuvres mathématiques diverses - Observation sur Diophante) - Methodus ad disquirendam maximam et minimam, pagg. 133 et ss.

[Fermat 2] *Œuvres de Fermat* publiées par le soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry, Paris, Gauthier-Villars et Fils, MDCCCXCI - Tome deuxième (Correspondance), pagg. 126 et ss.