La costante di Eulero-Mascheroni

Tesi di laurea di: Maria Antonietta Farina

Relatore: Prof. Lucio Cadeddu

Definizione:

La costante di Eulero – Mascheroni

è definita come:

$$\boxed{\gamma = \lim_{n \to +\infty} (S_n - \ln n)}$$

dove $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ è la ridotta n – esima

della serie armonica.

La serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ non converge,

si può vedere invece che il limite

$\lim_{n \to +\infty} (S_n - \ln n)$ converge.

Dalla formula di Maclaurin per

$\ln(1 + x)$

arrestata ai termini del primo ordine

e con il resto nella forma di Lagrange:

$$\ln(1 + x) = x + \frac{x^2}{2(1 + \theta x)^2} \qquad 0 < \theta < 1$$

Ponendo $x = \frac{1}{n}$

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{\theta_n}{2n^2} \qquad 0 < \theta_n < 1$$

$$0 < \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n^2}$$

e quindi la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

converge per il criterio del confronto.

D'altra parte si ha anche:

$$S_n - \ln n = \left(1 - \ln\frac{2}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \ln\frac{3}{2}\right) + + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\right) + \ln\frac{n+1}{n}$$

Dato che : $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} (S_n - \ln n) = \gamma$$

Si deduce che la successione è convergente.

Usando il criterio dell'integrale per la convergenza delle serie si può dimostrare che $0 < \gamma < 1$.

Teorema:

Sia f una funzione non negativa decrescente definita nell'intervallo $(1, +\infty)$. Allora:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$$ converge se e solo se

l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Corollario:

La differenza

$$\sum_{n=1}^{M} f(n) - \int_{1}^{M} f(x)dx \text{ converge}$$

per $M \to +\infty$

ad un limite compreso tra 0 e f(1).

Allora posto $f(x) = \frac{1}{x}$

Si ha: $\sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} - \int_{1}^{M} \frac{1}{x} dx$

$$\lim_{M \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} - \ln M \right) = \gamma$$

dato che $f(1) = 1,\ \ 0 < \gamma < 1.$

Per la prima volta la costante γ venne definita in un libro del matematico svizzero Eulero: *De progressionibus harmonicus observationes* (1735).

Di questa costante se ne occupò successivamente anche il matematico italiano Mascheroni in: *Adnotationes ad calculum integralem Euleri, in quibus nonnulla problemata ab Eulero proposita resolvuntur* (1790).

La sua rappresentazione decimale inizia così:

$\gamma = 0.5772156649\ldots$

Non si sa ancora oggi se γ sia un numero razionale o irrazionale, e non si conosce neppure se sia trascendente o algebrico.

Se si suppone che γ sia un numero razionale della forma $\frac{a}{b}$ allora si può dimostrare che

$$b > 10^{10000}$$

(Brent R. P., *Computation of the Regular Continued Fraction for Euler's Constant*, Wells D., *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*).

Successivamente con l′analisi in frazioni continue

$$0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}$$

è stato dimostrato che

il denominatore b ha più di 10^{242080} cifre.

(T. Papanikolau in Havil J.

Gamma: Exploring Euler's Constant)

Rappresentazioni di γ

- Si può riscrivere la definizione in questa forma:

$$\gamma = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\lfloor x \rfloor} - \frac{1}{x} \right) dx$$

dove $\lfloor x \rfloor$ è la parte intera di x.

- γ si ottiene come somma della serie:

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

- γ si ritrova anche come somma di altre serie:

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - \frac{n}{k} \right)$$

dove $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ è la parte intera superiore di $\frac{n}{k}$

- γ è legata alla funzione Gamma:

▹ $\gamma = \lim_{x \to +\infty} x - \Gamma\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Gamma: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

▹ $\gamma = -\Gamma'(1)$

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \ln t \, e^{-t} dt$$

$$\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} \ln t \, e^{-t} dt$$

- γ è legata alla funzione Beta:

Sia $B: (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt$$

è noto che $B(\alpha, \beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

$$\gamma = -\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma(n+1)n^{1+\frac{1}{n}}}{\Gamma\left(2+n+\frac{1}{n}\right)} - \frac{n^2}{n+1} \right)$$

- γ compare anche nel terzo teorema di Mertens:

$$e^{\gamma} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln p_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}}$$

p_i è l'i − esimo numero primo.

Risultati asintotici

$$\gamma \sim S_n - \ln n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{120n^4} + \cdots$$

(Eulero)

Si può dimostrare questo risultato con una formula che fa uso dei numeri di Bernoulli.

I numeri di Bernoulli sono i coefficienti

della seguente serie: $\dfrac{x}{e^x - 1} = \sum_{k \geq 0} \dfrac{B_k x^k}{k!}$

Somiglianza tra γ e π

$$\ln\left(\frac{4}{\pi}\right) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x - 1}{(1 + xy)\ln xy}\,dxdy$$

$$\gamma = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x - 1}{(1 - xy)\ln xy}\,dxdy$$

Data	Cifre decimali	Per opera di
1734	5	Leonhard Euler
1736	15	Leonhard Euler
1790	19	Lorenzo Mascheroni
1809	22	Johann G. von Soldner
1811	22	Carl Friedrich Gauss
1812	40	Friedrich Bernhard Gottfried Nicolai
1857	34	Christian Fredrik Lindman
1861	41	Ludwig Oettinger
1867	49	William Shanks
1871	99	James W.L. Glaisher
1871	101	William Shanks
1878	263	John C. Adams
1952	329	John William Wrench, Jr.
1961	1050	Helmut Fischer and Carl Zeller
1962	1.271	Donald Knuth
1962	3566	Dura W. Sweeney
1973	4879	William A. Beyer and Michael S. Waterman
1977	20700	Richard P. Brent
1980	30100	Richard P. Brent & Edwin M. McMillan
1993	172000	Jonathan Borwein
1997	1000000	Thomas Papanikolaou
Dicembre 1998	7,286,255	Xavier Gourdon
Ottobre 1999	108000000	Xavier Gourdon & Patrick Demichel
Luglio 16, 2006	2 000000000	Shigeru Kondo & Steve Pagliarulo
Luglio 15, 2007	5000000000	Shigeru Kondo & Steve Pagliarulo
Giugno 30, 2008	10000000000	Shigeru Kondo & Steve Pagliarulo
Gennaio 18, 2009	14922244771	Alexander J. Yee & Raymond Chan

L′ultimo risultato è:

Marzo 13, 2009	29844489545	Alexander J. Yee & Raymond Chan

Per ottenere le successive cifre decimali di γ è stato usato il seguente algoritmo:

$(Brent - McMillan)$

$$\gamma = \frac{A}{B} - \frac{C}{B^2} - \ln n + O(e^{-8n}) \quad \text{con } n = 2^{33}$$

e per la verifica:

$$\gamma = \frac{A}{B} - \ln n + O(e^{-4n}) \qquad \text{con } n = 2^{34}$$

dove

$$A = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{n^k}{k!}\right) S_k \ ; \ B = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{n^k}{k!}\right)^2$$

$$C = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left((2k)!\right)^3}{(k!)^4 (16n)^{2k}}$$

Conclusione

Hilbert nel suo discorso di apertura all'*International Congress of Mathematicians* a Parigi del 1900, parlò anche dell'irrazionalità della costante γ, ricordando che questo era un problema ancora irrisolto.