Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Una Scala Diabolica

Relatore
Prof. Lucio Cadeddu

Tesi di Laurea di
Atzori Valentina

Anno Accademico 2010/2011

Indice:

Prefazione

Intorno al 1880, il matematico tedesco Georg Cantor (1845-1905) scrivendo una serie di articoli intitolati "Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten" introduce i concetti da noi oggi conosciuti come *insieme (ternario)di Cantor e funzione di Cantor (o scala diabolica).*

Scopo del nostro lavoro è quello di studiare il comportamento di questa funzione, sia sull'insieme di Cantor che su tutto l'intervallo [0, 1].

Iniziamo col dare una definizione di insieme di Cantor e poi proseguiamo con lo studio delle proprietà abbastanza inconsuete della "*scala diabolica*"; essa è un esempio di funzione continua e crescente nonostante abbia derivata zero in quasi tutti i punti essendo costante in tutti i sotto intervalli di [0, 1] che non contengono punti dell'insieme di Cantor. Intuitivamente, è una scala con infiniti gradini, tutti di pendenza zero, ma ad altezze progressivamente crescenti, in modo che la pendenza media risulti comunque pari a 1.

Diamo inoltre la definizione di una strana curva, detta *curva di Peano*, la quale riempie completamente un quadrato, che viene definita da un'applicazione $\beta:[0,1]\to[0,1]\times[0,1]$ continua e suriettiva.

Capitolo 1

Retrospettiva storica

In questo capitolo vogliamo dare alcuni cenni su come Cantor arrivò alla definizione dell'insieme e della funzione di Cantor. Sebbene l'insieme di Cantor debba le sue origini alla geometria, pare invece che il matematico tedesco arrivò alla definizione di insieme e funzione di Cantor per via puramente aritmetica senza coinvolgere minimamente la geometria.

Lo studio della topologia della retta reale ebbe inizio intorno al 1880, periodo nel quale i matematici erano impegnati nello studio di due problemi molto importanti:

1. condizioni sotto le quali una funzione può essere integrata, e

2. unicità e convergenza di serie trigonometriche.

E' stato nell' ambito di queste indagini che le due scoperte apparentemente indipendenti dall'insieme di Cantor sono state fatte.

Il matematico Bernhard Riemann (1826 -1866) dedicò molto del suo tempo allo studio del primo problema, suggerendo le condizioni secondo le quali una funzione poteva essere integrata, arrivando allo sviluppo della teoria della misura e dell' integrazione. Un passo importante in questa direzione è stato compiuto da Hermann Hankel (1839-1873) intorno ai primi anni del 1870. Hankel ha mostrato che l'integrabilità di una funzione dipende dalla natura di certi insiemi di punti relativi alla funzione. In particolare osservò che una funzione risultava Riemann-integrabile se e solo se risultava puntualmente discontinua a tratti, ossia se l' insieme di punti *x* in cui la funzione è definita è un insieme non ovunque denso. Alla base del ragionamento di Hankel c'era la convinzione che insiemi della forma $\{\frac{1}{2^n}\}$ rappresentavano un modello per tutti i sottoinsiemi ovunque non densi della retta reale. Lavorando a questa ipotesi Hankel affermò che tutti i sottoinsiemi ovunque non densi della retta reale potevano essere contenuti in intervalli di lunghezza arbitrariamente piccola.

La prima persona che definì un insieme, che oggi può ricordarci l'insieme di Cantor, fu un professore di geometria a Oxford, ovvero H.J.S. Smith, il quale in un articolo [2] del 1875, fornì una definizione di insiemi non ovunque densi. Dopo un esposizione sull'integrazione delle funzioni discontinue, Smith presentò un metodo per costruire insiemi ovunque non densi di fatto molto più sostanziali rispetto all'insieme $\{\frac{1}{2^n}\}$.

In particolare Smith osservò quanto segue:

Sia m un numero intero maggiore di 2. Dividiamo l'intervallo [0, 1] in m parti uguali ed escludiamo l'ultimo sub intervallo da qualsiasi successiva divisione. Dividiamo poi ciascuno degli m-1 intervalli restanti in m parti uguali ed escludiamo gli ultimi segmenti da qualsiasi divisione successiva. Eseguendo tale operazione all' infinito, otteniamo un numero infinito di punti di divisione P sulla retta da 0 a 1. Questi punti si trovano in ordine sparso. [2,p. 147] .

Nella terminologia moderna quello che Smith intendeva per ordine sparso si ritrova nel concetto di *insieme ovunque non denso*. Ciò che risulta implicito nella definizione di Smith è che gli intervalli esclusi da qualsiasi divisione sono aperti di modo che l'insieme risultante sia chiuso. Oggi questo insieme sarebbe stato conosciuto come un *insieme generico di Cantor* e questo sembra essere il primo esempio pubblicato relativamente a tale tipologia di insieme. Successivamente, nello stesso articolo, Smith dimostrò che dividendo gli intervalli rimanenti prima dell' n-esimo passo in m^n parti uguali ed escludendo l'ultimo intervallo da qualsiasi divisione si ottiene un insieme ovunque non denso di contenuto esterno positivo. Smith era ben consapevole dell' importanza di questa scoperta poiché come egli stesso affermava, il risultato ottenuto nell'ultimo esempio si caratterizzava per la sua opposizione ad una teoria delle funzioni discontinue, la quale ricevette l'approvazione del geometra H. Henkel. Egli inoltre spiegò le difficoltà nelle teorie contemporanee sull'integrazione.

E' interessante notare che l'osservazione dell'editore a conclusione del lavoro di Smith affermava "questo documento, sebbene non sia stato letto, è stato offerto alla *London Mathematical Society* ed accettato in modo usuale". In realtà, questo lavoro è passato in gran parte inosservato tra i matematici del continente europeo e, purtroppo, le importanti scoperte di Smith restarono a lungo sconosciute. Almeno dieci anni dopo, grazie alla riscoperta di idee simili da parte di Cantor, è stato possibile comprendere le difficoltà delle teorie contemporanee sull'integrazione e iniziare l'evoluzione della teoria della misura e dell' integrazione.

Cantor arriva, invece, allo studio della topologia della retta reale negli anni 1879-1884 scrivendo una serie di articoli intitolati "Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten [3-8]". Nel primo articolo di questa serie Cantor definisce cosa significa, per un insieme, essere ovunque denso, un termine il cui utilizzo è ancora di uso corrente. Egli fornisce alcuni esempi tra cui uno riguardante l'insieme dei numeri della forma , $\frac{2^{2n+1}}{2^m}$, dove *n* e *m* sono dei numeri interi. Egli prosegue con gli insiemi densi e le relazioni che intercorrono con i loro derivati. Vale a dire, $P \subset (\alpha, \beta)$ è ovunque denso in (α, β) se e solo se $P' = (\alpha, \beta)$. Dove con P indica un insieme finito e con P' il suo derivato ossia l'insieme dei punti di accumulazione di P [3,p. 2-3] . Nel quinto articolo Cantor discute la partizione di un insieme in due componenti che egli definisce riducibili e perfette [7,p. 575]. La sua definizione di insieme perfetto è ancora attuale : un insieme P è perfetto se e solo se P = P'.

Dopo aver introdotto il termine perfetto, nel quinto articolo, Cantor afferma che un insieme per essere perfetto non ha bisogno di essere ovunque denso [7,p. 575]. Nella nota in calce a questa dichiarazione Cantor introduce l'insieme che oggi è noto come *insieme (ternario) di Cantor*.

L' insieme dei numeri reali della forma:

$$x = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{c_v}{3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

dove c_v è 0 oppure 2 per ogni numero intero v. Cantor nota che tale insieme è infinito, perfetto secondo la proprietà che lo definisce non ovunque denso in ogni intervallo, indipendentemente da quanto piccolo l'intervallo venga considerato. Non ci viene data alcuna indicazione su come Cantor arrivi alla definizione di questo insieme.

Nel periodo in cui Cantor lavora sulla serie di articoli "Punktmannichfaltigkeiten", altri si dedicano alle estensioni del Teorema Fondamentale del Calcolo delle funzioni discontinue. Cantor affronta tale questione in una lettera [9] del 1883(scritta in realtà nel mese di Ottobre del 1882). Nella lettera Cantor definisce la *funzione di Cantor*. In primo luogo viene definita sul complementare dell' insieme di Cantor, la funzione i cui valori sono:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{c_{\mu-1}}{2^{\mu-1}}+\frac{2}{2^{\mu}}\right)$$

per qualsiasi numero compreso tra a e b con:

$$a=\frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{3}+\ldots\ldots\ldots+\frac{c_{\mu-1}}{3^{\mu-1}}+\frac{1}{3^{\mu}} \quad e \quad b=\frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{3}+\ldots\ldots\ldots+\frac{c_{\mu-1}}{3^{\mu-1}}+\frac{2}{3^{\mu}}$$

dove ogni c_μ è 0 o 2. Cantor conclude poi questa parte della lettera notando che questa funzione può essere estesa naturalmente ad una funzione continua e crescente su [0,1] .

Tale funzione serve da contro esempio per il Teorema Fondamentale del Calcolo delle funzioni discontinue di Harnack, che era in voga in quel periodo. Anche in questo caso, non ci viene data alcuna indicazione su come Cantor arrivò alla definizione di questa funzione né, a quanto sembra, esiste una prova sostanziale di come Cantor arrivò alla definizione dell'insieme. Tuttavia, la strada seguita da Cantor nello studio della topologia della retta reale, nell'introduzione dell'insieme e della funzione di Cantor sembra seguire metodi puramente aritmetici. E' possibile che sia proprio nell'ambito dell'espansione aritmetica dei numeri binari e ternari che Cantor arrivò proprio alla definizione dei concetti di insieme e di funzione di Cantor.

Capitolo 2

Costruzione dell' insieme di Cantor

Per definire l'Insieme di Cantor procediamo costruttivamente.

Prendiamo l'intervallo $[0,\ 1]$, dividiamolo in tre parti uguali ed eliminiamo da esso l'intervallo aperto centrale, ovvero l' intervallo $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Dopo questa operazione ciò che resta è l'unione dei due intervalli chiusi $\left[0,\ \frac{1}{3}\right]$ e $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Suddividiamo ora ciascuno dei due intervalli rimanenti in tre parti uguali ed eliminiamo gli intervalli aperti centrali, cioè $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ e $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$.

Ciò che resta è l'unione di quattro intervalli chiusi più piccoli. Procedendo ulteriormente restano otto intervalli ancora più piccoli,

e così via proseguendo all'infinito.

Cerchiamo, ora, di descrivere l'insieme con una scrittura compatta.
Al primo passo abbiamo :

$$c_0 = [0, 1]$$

mentre al secondo passo:

$$c_1 = \left[0,\ \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

e al passo successivo:

$$c_2 = \left[0,\ \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9},\ \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},\ \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},\ 1\right]$$

cosi via, e ricordandoci che con c_k indichiamo l'unione degli intervalli rimasti al *k*-esimo passo. Possiamo quindi definire *l'insieme di Cantor* :

$$\boldsymbol{C} = \bigcap_{k=0}^{\infty} c_k.$$

Tutti i c_k sono chiusi in $\Re$, perché unione di un numero finito di intervalli chiusi. Quindi anche $\boldsymbol{C}$ è chiuso, poiché intersezione di una famiglia di insiemi chiusi. Gli insiemi c_k sono poi anche incapsulati (sono cioè una successione di intervalli tali che il successivo è incluso nel precedente) $c_0 \supset c_1 \supset c_2 \supset c_3$ …………….. e diventano via via più piccoli al crescere di k.

Ogni c_k consiste di 2^k intervalli chiusi e disgiunti, ognuno di lunghezza $\frac{1}{3^k}$.

Abbiamo:

$$|\boldsymbol{C}| = \lim_{n\to\infty}|c_k| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k = 0$$

si dice, quindi, che $\boldsymbol{C}$ ha misura nulla.

Inoltre nell'intorno di ogni punto dell'insieme di Cantor ci sono sia punti contenuti nell'insieme che punti contenuti nel suo complementare. Ne segue che ogni punto dell'insieme di Cantor è punto di accumulazione: un insieme chiuso con questa proprietà è detto *perfetto*, da ciò deduciamo che $\boldsymbol{C}$ non è numerabile.

Infatti l' insieme di Cantor $\boldsymbol{C}$ contiene tanti punti quanti ne contiene l'intervallo $[0, 1]$, entrambi hanno la cardinalità del continuo.

2.1 Rappresentazione dei numeri reali in base 3

Ogni numero $x \in [0,\ 1]$, rappresentato in base 3, può essere scritto nella seguente forma:

$x = 0,\, a_1\ a_2 a_3 a_4 \ldots\ldots a_k \ldots\ldots\ldots$ con $a_k \in \{0,1,2\}$ $\forall k \in$ **N**.

E' fondamentale tener presente che tale rappresentazione significa:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{3^k}\right)$$

Esempi:

- $(0{,}1)_3 = \frac{1}{3} = (0{,}\overline{3}\ )_{10}$

- $(0{,}020202 \ldots\ldots\ldots)_3 = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \ldots\ldots\ldots = (0{,}25)_{10}$

Adotteremo la convenzione per cui:

i numeri *ternari finiti* con ultima cifra uguale a 1 vengono modificati in numeri ternari periodici di *periodo* 2.

Per esempio:

$$\frac{1}{3} = 0{,}1 = 0{,}0\overline{2} = 0,\ 0222222\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Questo è lecito perché:

$$0{,}0\overline{2}\ =\ 0,0222.\ldots.2\ldots = \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3^k}\right) = \frac{2}{9}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^k}\right) =$$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{2}{9}\,\frac{3}{2} = \frac{1}{3}$$

Capitolo 3

Funzione di Cantor o Scala diabolica

Vogliamo definire sull'insieme di Cantor una funzione con delle proprietà abbastanza inconsuete, che viene chiamata *funzione di Cantor o scala diabolica.*

3.1 Definizione analitica della Funzione di Cantor

Da un punto di vista analitico definiamo la funzione di Cantor nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} f((0, a_1 a_2 a_3 \dots \dots)_3) = (0, \frac{a_1}{2} \frac{a_2}{2} \frac{a_3}{2} \dots \dots)_2 & x \in \boldsymbol{C} \\ cost. & x \in [0,1] \setminus \boldsymbol{C} \end{cases}$$

Cominciamo col definirla sull'insieme di Cantor $\boldsymbol{C}$ e poi la estendiamo a tutto $[0, 1]$. Se x è un elemento di $\boldsymbol{C}$, la sua scrittura in base 3 è del tipo : $x = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots\dots a_k \dots\dots\dots$, in cui gli a_k sono solo 0 oppure 2.

Poniamo ora:

$$f(x) = f((0,a_1a_2a_3.\dots\dots)_3) = (0,\frac{a_1}{2}\frac{a_2}{2}\frac{a_3}{2}\dots\dots\dots\dots\dots)_2$$

Otteniamo così l'immagine di x sostituendo tutti i 2 della scrittura ternaria con degli 1, e interpretando il numero cosi ottenuto in base due.

Questa funzione non è iniettiva, possiamo infatti far vedere che sugli estremi di ciascun intervallo, che abbiamo eliminato per costruire l'insieme di Cantor, essa assume valori uguali.

Lo verifichiamo, per esempio, sul primo intervallo che abbiamo eliminato $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$; questo intervallo ha come estremi i punti $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$, quindi dobbiamo calcolare $f\left(\frac{1}{3}\right)$ e $f\left(\frac{2}{3}\right)$. Abbiamo:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = f((0{,}1)_3) = f\left((0{,}0\overline{2})_3\right) = \left((0{,}0\overline{1})_2\right) = (0{,}1)_2 = \frac{1}{2} \quad \text{e}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = f((0{,}2)_3) = (0{,}1)_2 = \frac{1}{2}\ .$$

La nostra funzione risulta essere suriettiva. Infatti possiamo scrivere ogni numero dell'intervallo $[0,\ 1]$, in forma binaria, con una scrittura del tipo $0{,}b_1b_2\ b_3\ \dots\dots b_n\dots\dots$ e tale numero è sicuramente l'immagine dell'elemento dell'insieme di Cantor che si scrive, in forma ternaria, sostituendo come ben sappiamo gli 1 con i 2.

Inoltre è una funzione crescente. Consideriamo due numeri dell' insieme di Cantor x e y, tali che x < y, i quali hanno la seguente rappresentazione ternaria:

x = $0, a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots a_n \ldots\ldots\ldots$ e y = $0, b_1 b_2\, b_3 \ldots\ldots b_n \ldots\ldots$

con *n* il primo indice dopo la virgola per cui i due numeri differiscono.

Dobbiamo, quindi, avere $a_n = 0$ e $b_n = 2$. I nostri due numeri sono allora:

x = $0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} 0\, a_{n+1} \ldots$ e y = $0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} 2\, b_{n+1} \ldots$

e per le immagini abbiamo:

$$f(\mathrm{x}) = f\big((0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} 0\ a_{n+1} \ldots)_3\big) =$$

$$= \left(0, \tfrac{a_1}{2} \tfrac{a_2}{2} \ldots \tfrac{a_{n-1}}{2}\ 0\ \tfrac{a_{n+1}}{2} \ldots\right)_2 \leq$$

$$\leq \left(0, \frac{a_1}{2} \frac{a_2}{2} \ldots \ldots \frac{a_{n-1}}{2}\, 1\, \frac{b_{n+1}}{2} \ldots\right)_2 =$$

$$= f\big((0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} 2\ a_{n+1}. \ldots)_3\big) =$$

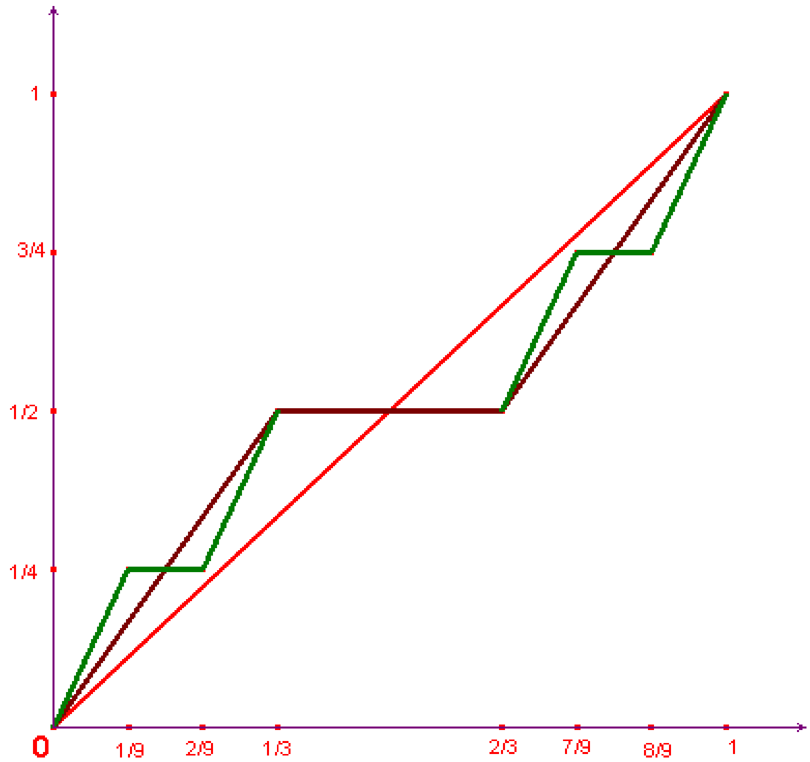
$$= f(\mathrm{y})$$

come volevamo dimostrare.

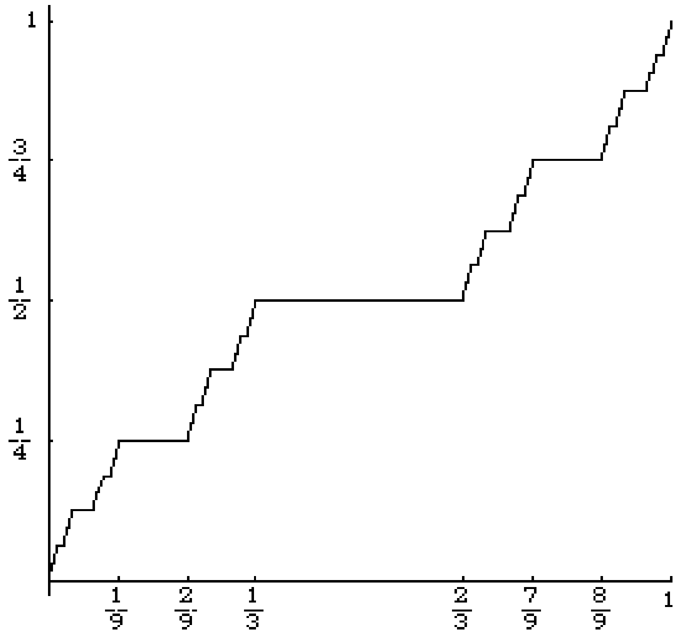
Possiamo ora estendere la funzione f a tutto $[0,\ 1]$, come detto sopra, $f(x) = costante$ in corrispondenza di tutti gli intervalli che abbiamo cancellato per costruire l'insieme di Cantor, ossia in $[0,1]\setminus \boldsymbol{C}$.

La funzione che otteniamo è anche continua.

Per farci un idea del grafico dobbiamo immaginarla costruita per passi, esattamente come abbiamo fatto per l'insieme di Cantor.



In sostanza, man mano che procediamo nel raffinamento del grafico otteniamo un sempre maggior numero di tratti orizzontali, corrispondenti a tutti i segmenti che abbiamo cancellato dall' intervallo $[0,\ 1]$ durante la costruzione dell'insieme di Cantor; mentre la salita si spezzetta in tratti sempre più corti, ma sempre più pendenti. La funzione vera e propria ha quindi infiniti tratti orizzontali, che corrispondono alle "*pedate*" della scalinata.



La prima cosa che ci sorprende è che se calcoliamo la lunghezza totale delle *"pedate"* otteniamo 1, cioè tanto quanto lo spazio orizzontale occupato dalla scala stessa. Questo dipende dal fatto che, proprio per costruzione, $[0,1]\setminus \boldsymbol{C}$ è costituito dall'unione di intervalli aperti (i terzi medi eliminati) disgiunti e quindi possiamo determinare la sua lunghezza sommando quella di tutti gli intervalli che lo costituiscono.

Abbiamo quindi:

$$\mathrm{L}\,(\,[0,1]\backslash\,\boldsymbol{C}\,) = \mathrm{L}\left(\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)\cup\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)\cup\ \ldots\ldots\ldots\ldots\right) =$$

$$= \mathrm{L}\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) + \mathrm{L}\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right) + \mathrm{L}\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots =$$

$$= \frac{1}{3} + 2\,\frac{1}{9} + 4\,\frac{1}{27} + 8\,\frac{1}{81} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots =$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{3}\,\frac{3}{1} = 1$$

Un'altra cosa che ci sorprende è che, pur essendo crescente dal valore 0 al valore 1, non risulta strettamente crescente su nessun sotto intervallo di $[0,1]$: per giustificare questo fatto dobbiamo tener ben presente l’insieme di Cantor ricordandoci che su ogni sotto intervallo di $[0,1]$ c’è sempre un segmento in cui la funzione risulta costante.

Notiamo inoltre che la funzione è continua (questo discende dal fatto che la funzione è crescente e la sua immagine è un intervallo), e quindi pur avendo infiniti gradini, non c'è nessun salto o discontinuità di prima specie (tipo salto).

Derivabilità:

E' anche interessante osservare che questa funzione è derivabile quasi ovunque (tranne che sull'insieme $\boldsymbol{C}$, che ha misura nulla), con derivata nulla. Abbiamo quindi:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \forall\, x \in [0,1] \setminus \boldsymbol{C} \\ \nexists & x \in \boldsymbol{C} \end{cases}$$

Consideriamo, ora, una funzione $g(x)$ cosi definita:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \setminus \boldsymbol{C} \\ S & x \in \boldsymbol{C} \end{cases}$$

Dove S è una qualunque quantità limitata, possiamo notare che $g(x)$ coincide quasi ovunque (ossia tranne che per un insieme di misura nulla) con la derivata di $f(x)$ ossia $f'(x)$. La funzione $g(x)$ è sicuramente integrabile secondo Riemann, in quanto proprio per definizione, una funzione è integrabile secondo Riemann perché nulla tranne che in un insieme di misura nulla, in questo caso $\boldsymbol{C}$;

abbiamo quindi :

$$h(x) = \int_0^x g(t)\ \ dt = 0.$$

A differenza di quanto ci aspettavamo, otteniamo, $h(x) \neq f(x)$, per $x > 0$.

In altri termini l'integrale della derivata della *scala diabolica* (quando essa è derivabile) non è la *scala diabolica*. In simboli :

$$h(x) = \int_0^x g(t)\ \ dt\ =\ \int_0^x f'(t)\, dt\ \neq\ f(x)$$

3.2 Funzione di Cantor come limite di una successione

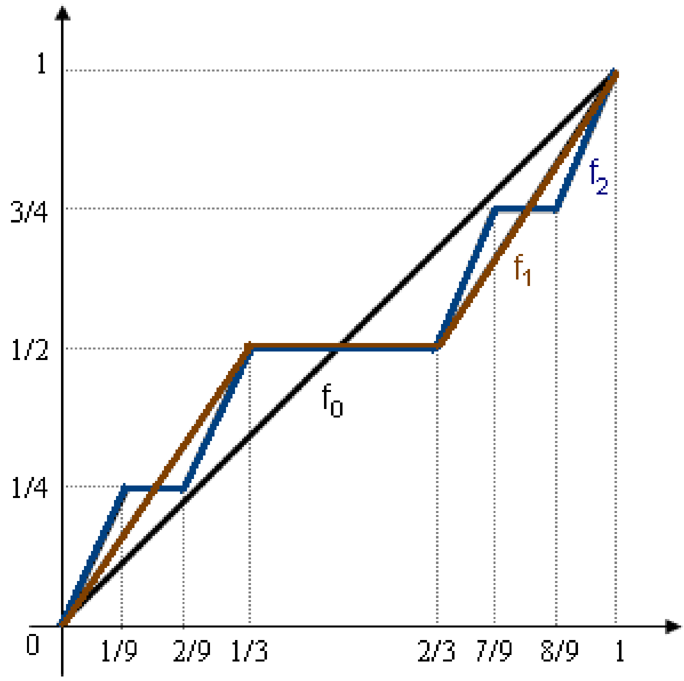
In maniera alternativa possiamo definire la funzione di Cantor come limite di una successione di funzioni $\in \boldsymbol{C^0}([0, 1])$ (lo spazio delle funzioni continue definite sull' intervallo $[0, 1]$).

In particolare queste successioni di funzioni sono definite per ricorrenza come poligonali su $[0, 1]$.

Costruiamo la successione di funzioni nel seguente modo:

- Poniamo $f_0(x) = x$;

- $f_n(x)$ è una funzione crescente il cui grafico è la poligonale, come possiamo vedere in figura, avente 2^{n+1}-1 lati: di cui 2^n lati sono obliqui di coefficiente angolare $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ e 2^n-1 lati orizzontali, ciascuno di lunghezza $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ abbiamo $f_0(0) = 0$, $f_1(1) = 1$. In figura sono rappresentate f_0, f_1, f_2.



Possiamo "costruire" la n+1-esima poligonale f_{n+1} come una trasformazione di f_n infatti, indichiamo con $I_k^{(n)}$, per k=1,……, 2^n la proiezione sull'asse delle ascisse dei lati obliqui e con $J_k^{(n)}$, per k=1,……, 2^n-1 la proiezione sull'asse delle ascisse dei lati orizzontali, quindi f assume il valore costante nell' intervallo $J_k^{(n)}$,

e questo valore lo possiamo indicare con $\{ \frac{k}{2^n} \}$, allora abbiamo che f_{n+1}= $f_n$in $J_k^{(n)}$ per ogni k, mentre ogni lato obliquo di f_n (che ha come proiezione sull'asse delle ascisse l'intervallo $I_k^{(n)}$) lo modifichiamo in tre lati, di cui due obliqui in corrispondenza agli intervalli $I_{2k-1}^{(n+1)}$ e $I_{2k}^{(n+1)}$, e uno orizzontale in corrispondenza all' intervallo $J_{2k-1}^{(n+1)}$.

Abbiamo quindi:

$sup_{p\in\mathrm{N}} \{max_{x\in[0,1]} \{ f_n(x) - f_{n+p}(x) \}\} < \frac{1}{3 \quad 2^n} <$ ε

se n è grande.

Da questo risultato deduciamo che la successione è di Cauchy in $\boldsymbol{c}^{\mathbf{0}}([0,1])$, cioè nello spazio delle funzioni continue definite sull' intervallo $[0,1]$.

Dunque per $n \to \infty$ essa converge uniformemente ad una funzione limite che appartiene allo stesso spazio, chiamata *funzione di Cantor*.

Capitolo 4

Curva di Peano

Nel 1890 il matematico Giuseppe Peano (1858–1932) pubblicò un articolo intitolato “*Sur une courbe qui remplit toute une aire plane*” sui Mathematische Annalen nel quale dimostrava l'esistenza di una 'strana' curva (da allora detta di Peano) che riempie completamente un quadrato, definita da un'applicazione
β:$[0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1]$continua e suriettiva.

4.1 Costruzione analitica della curva di Peano

Vogliamo innanzitutto definire una funzione γ continua e suriettiva dall’ insieme di Cantor nel quadrato $[0,1] \times [0,1]$.
Definiamo una funzione σ, considerando la rappresentazione ternaria usata per definire l’insieme di Cantor, nel seguente modo:

$$\sigma : \{0,2\}^{\mathbf{N}} \rightarrow \{0,2\}^{\mathbf{N}} \qquad \text{con } \sigma(a) = (\sigma'(a)\,,\, \sigma''(a))$$

$$\sigma'(a)_n = (a_1 a_3 a_5 \ldots\ldots\ a_{2k-1} \ldots\ldots)$$

(cifre di a = $(a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots\ldots a_k \ldots\ldots)$ di posto dispari)

$\sigma''(a)_n = (a_2 a_4 a_6 \dots \dots\ a_{2k} \dots \dots)$

(cifre di $a = (a_1 a_2 a_3 \dots \dots \dots a_k \dots \dots)$ di posto pari)

La nostra funzione γ sarà quindi definita nel seguente modo:

$$\gamma\,(x) = \left(B(\sigma'(f^{-1}(x)))\,, B(\sigma''(f^{-1}(x))) \right) \in [0,1] \times [0,1]$$

con $x = 0{,}a_1 a_2 a_3 a_4 \dots\dots a_k \dots\dots \in \boldsymbol{C}$

Ricordandoci, inoltre, che:

$$f\colon\{0,2\}^{\mathbf{N}} \to \boldsymbol{C}$$

$$f(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{3^k}\right)$$

e

$$B\colon\{0,2\}^{\mathbf{N}} \to [0,1]$$

$$B(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2}\,\frac{1}{2^k}\right)$$

Dove $\frac{a_k}{2} = 0$ se $a_k = 0$ e $\frac{a_k}{2} = 1$ se $a_k = 2$.

Abbiamo ottenuto il valore di γ in un punto $x \in \boldsymbol{C}$ in tre passi:

1. trovato lo sviluppo ternario $a = f^{-1}(x)$;
2. sdoppiato a tramite σ ottenendo $(b, c) = (\sigma'(a), \sigma''(a))$;
3. calcolato la "binarizzazione" di b e c con la funzione B introdotta in precedenza : $\gamma(x) = (B(b), B(c))$;

Per capire meglio come si comporta γ facciamo alcuni esempi:

$x = 0$, $a = (000\ldots\ldots)$, $b = c = (000\ldots\ldots)$, $B(b) = B(c) = 0$,

$\gamma(0) = (0, 0)$;

$x = 1$, $a = (222\ldots)$, $b = c = (222\ldots)$,

$B(b) = B(c) = (0{,}111\ldots)_2 = 1$, $\gamma(1) = (1, 1)$;

$x = \frac{1}{3}$, $a = (0222\ldots\ldots)$, $b = (0222\ldots\ldots)$, $c = (222\ldots\ldots)$,

$B(b) = (0{,}0111\ldots)_2 = \frac{1}{2}$, $B(c) = 1$, $\gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$;

$x = \frac{2}{3}$, $a = (2000\ldots\ldots)$, $b = a$, $c = (000\ldots\ldots)$,

$B(b) = (0{,}1)_2 = \frac{1}{2}$, $B(c) = 0$, $\gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$;

L' applicazione γ è suriettiva, non è iniettiva. Inoltre, grazie alle proprietà delle funzioni componenti non è difficile provare che è continua.

Possiamo finalmente dare la definizione della *curva di Peano:* $\beta : [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$ con $\beta(x) = \gamma(x)$ per $x \in \boldsymbol{C}$.

Vogliamo capire come è fatta β nell'intervallo $[0,1] \setminus \boldsymbol{C}$.

Sia $x \in [0,1] \setminus \boldsymbol{C}$ e siano x', x'' gli estremi dell' intervallino contenente x, per cui: $x' < x < x'' = x' + \frac{1}{3^k}$.

Definiamo come $\beta(x)$ quel punto di $[0,1] \times [0,1]$ che divide il segmento che congiunge $\gamma(x')$ con $\gamma(x'')$ nella stessa proporzione in cui x divide il segmento $[x', x'']$:

x' x x'' $\gamma(x')$ $\beta(x)$ $\gamma(x'')$

Questo procedimento è detto " *interpolazione lineare* ". In formula:

$$\beta(x) = \frac{x - x'}{x'' - x}\gamma(x'') + \frac{x'' - x}{x'' - x'}\gamma(x').$$

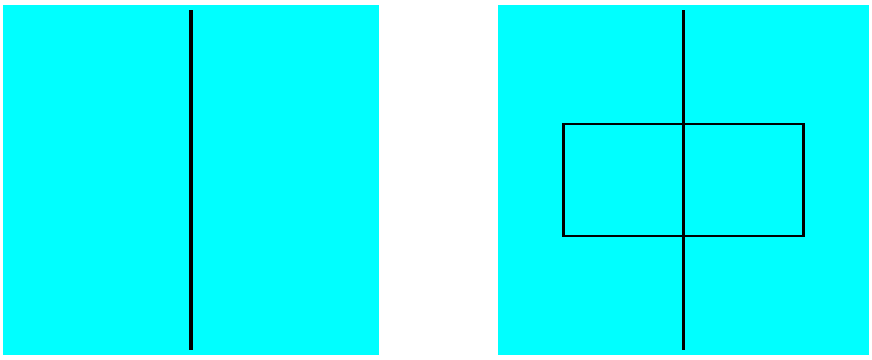
Visto che $\gamma(x'')$ e $\gamma(x')$ appartengono a $[0,1] \times [0,1]$, anche tutto il segmento che li congiunge giace nel quadrato.

La nostra funzione è suriettiva e continua.

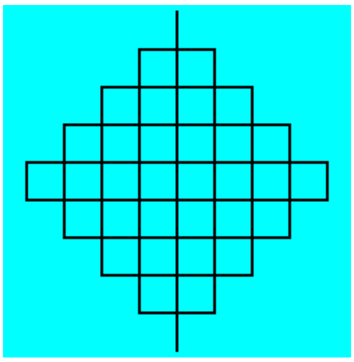
4.2 Costruzione della curva di Peano

Dividiamo un segmento unitario in tre segmenti uguali.

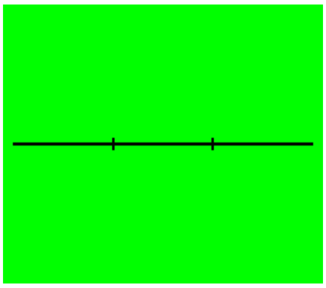
Sulla parte centrale si costruisce un rettangolo formato da due quadrati e il lato di ognuno è $\frac{1}{3}$ del segmento iniziale. È esattamente una poligonale, formata da 9 segmenti, che può essere percorsa senza alzare la matita e senza passare due volte sullo stesso tratto.

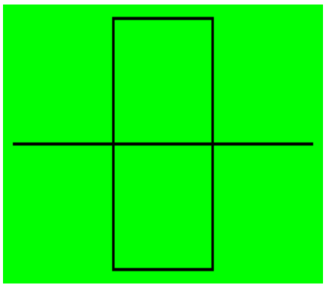


Tale costruzione si ripete su ciascuno dei 9 segmenti, dividendo ognuno in tre parti uguali e costruendo sulla parte centrale un rettangolo con il medesimo procedimento esposto in precedenza

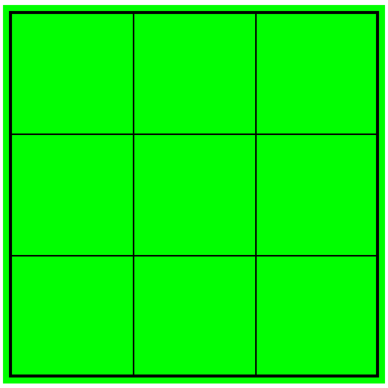


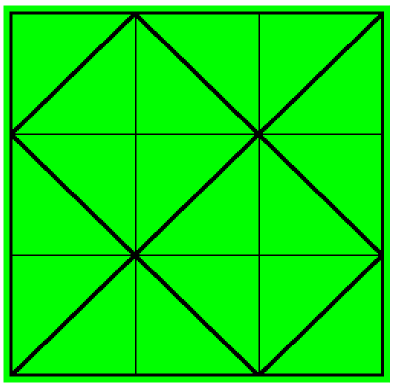
Cerchiamo di capire come la curva di Peano riempie un quadrato, per questo motivo analizziamo con attenzione la costruzione iniziale della curva di Peano.



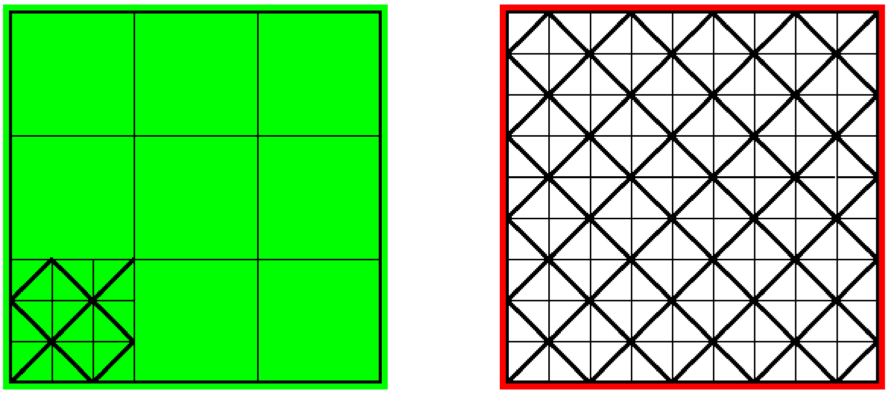


La poligonale è formata da 9 segmenti che si possono ottenere partendo dal segmento iniziale e costruendo, su questo, un quadrato. Si scompone tale quadrato in 9 quadratini uguali. Si possono mettere tali 9 quadratini in corrispondenza biunivoca con i 9 segmenti della poligonale iniziale e si rende visualizzabile tale corrispondenza, in modo che ogni segmento della poligonale sia la diagonale di un quadratino.





Ripetendo la costruzione su ciascuno dei 9 quadratini, si capisce che, continuando a reiterare lo stesso procedimento, la poligonale tende a una curva che passerà per tutti i punti del quadrato.



BIBLIOGRAFIA

1. *JULIAN F. FLERON*, A Note on the History of the Cantor Set and Cantor Function; *Mathematics Magazine Vol.67,No.2.(Apr.,1994), pp. 136-140.*

2. *H.J.S. Smith,* On the integration of discontinous functions; *Proc .London Math.Soc. (1) 6(1875), pp.140-153.*

3. *G.Cantor*, Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten; *Part.1, Math. Ann. 15(1879),pp.1-7.*

4. *G.Cantor,* Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten; *Part.2, Math. Ann. 17(1880),pp.355-358.*

5. *G.Cantor,* Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten; *Part.3, Math. Ann. 20(1882),pp.113-121.*

6. *G.Cantor*, Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten; *Part.4, Math. Ann. 21(1883),pp.51-58.*

7. *G.Cantor*, Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten; *Part.5, Math. Ann. 21(1883),pp.545-591.*

8. *G.Cantor,* Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten; *Part.6, Math. Ann. 23(1884),pp.453-488.*

9. *G.Cantor,* De la puissance des ensembles parfaits de points, *Acta Math.4(1884),pp.381-392.*

10. *Antonio Avantaggiati*, Introduzione alla teoria della misura e dell'integrazione, *Università "La Sapienza" di Roma.*

11. *Vincenzo Valori*, L'insieme di Cantor , *Università degli Studi di Firenze* 2005.

12. *G.Gorni. 2006/07*, L'Insieme di Cantor e la Curva di Peano.

13. *G.D.Pagani,S.Salsa,* Analisi matematica, *volume 2.*

14. *Giacomo d'Antonio,* Appunti di Analisi Funzionale 2008.

SITIGRAFIA

1. www.batmath.it, *di maddalena falanga e luciano battaia*.
2. ***it.wikipedia.org/wiki/****Insieme_di_Cantor*.
3. ***it.wikipedia.org/wiki/****Funzione_di_Cantor*.