Università degli studi di Cagliari

Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tesi di Laurea

I Numeri di Bernoulli
e le loro applicazioni

Relatore: *Prof. Lucio Cadeddu*

Candidata: *Stefania Aru*

Anno Accademico 2010/2011

Tesi di Laurea

I Numeri di Bernoulli
e le loro applicazioni

I numeri di Bernoulli e le loro applicazioni

Capitolo 1

I numeri di Bernoulli

Capitolo 2

La funzione zeta di Riemann

Capitolo 3

I NUMERI DI BERNOULLI

1.1 Introduzione

I *numeri di Bernoulli* sono radicati nella storia del calcolo delle somme di potenze intere, che sono state di interesse per i matematici fin dall'antichità.

I metodi per calcolare la somma dei primi *n* numeri interi positivi, la somma dei quadrati e dei cubi dei primi *n* interi positivi erano conosciuti, ma non vi erano 'reali formule', bensì solo descrizioni fornite interamente in parole. Tra i grandi matematici dell'antichità che considerarono questo problema troviamo: Pitagora (572-497 a.C., Grecia), Archimede (287-212 a.C., Italia), Aryabhata (476, India) e Abu Bakr al-Karaji (1019, Persia).

Durante il tardo Cinquecento e nei primi anni del Diciassettesimo secolo i matematici compirono progressi significativi. In Occidente Thomas Harriot (1560-1621, Inghilterra), Johann Faulhaber (1580-1635, Germania), Pierre de Fermat (1601-1665, Francia) e Blaise Pascal svolsero un ruolo importante.

Thomas Harriot sembra essere stato il primo a trovare e scrivere formule per la somma di potenze con la notazione simbolica, ma riuscì a svolgere il calcolo solo sino alla potenza quarta. Johann Faulhaber elaborò le formule per la somma di potenze fino alla potenza diciassettesima e le trattò nella sua *Academia Algebrae* 1631, ma non riuscì a realizzare una formula generale. Il matematico svizzero Jacob Bernoulli (1654-1705) fu il primo a rendersi conto dell'esistenza di una singola sequenza di costanti B_0, B_1, B_2, … che prevedono una formula uniforme per tutte le somme di potenze.

La soddisfazione di Bernoulli fu completa quando determinò una formula per calcolare velocemente e facilmente i coefficienti della sua formula per la somma della potenza *n*-esima per ogni *n* intero positivo. Il risultato di Bernoulli fu pubblicato postumo nell'*Ars Conjectandi* nel 1713. Seki Kowa scoprì indipendentemente i numeri di Bernoulli e il suo risultato fu pubblicato un anno prima, anch'esso postumo, nel 1712. Tuttavia, Seki non presentò il suo metodo come una formula basata su una sequenza di costanti.

La formula di Bernoulli per la somma di potenze è la formulazione più utile e generalizzata fino a oggi. I coefficienti nella formula di Bernoulli sono chiamati *numeri di Bernoulli*, seguendo un suggerimento di Abraham de Moivre.

In matematica, i numeri di Bernoulli sono una sequenza di numeri razionali con profonde connessioni con la teoria dei numeri. Sono strettamente legati ai valori della funzione zeta di Riemann a interi negativi.

1.2 Determinazione dei Numeri di Bernoulli

La funzione

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

non è definita in $x = 0$, ma questa singolarità è eliminabile perché i limiti per $x \to 0$ da destra e da sinistra sono finiti e coincidono, come si può facilmente verificare applicando la regola di De L'Hopital. La stessa cosa si verifica per le sue derivate:

f'(x) = $\frac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2}$,

f''(x)= $\frac{e^x((x-2)e^x+x+2)}{(e^x-1)^3}$.

Possiamo quindi effettuare lo sviluppo in serie di Mc Laurin in un intorno di 0, ovvero:

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n\geq 0} B_n \frac{x^n}{n!}$$

dove B_n rappresenta il limite per *x* → 0 della derivata *n*-esima di *f(x)*:

$$B_n = \lim_{x\to 0} f^{(n)}(x)$$

Con questa procedura si ottiene:

$B_0 = \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1} = 1$

$B_1 = \lim_{x\to 0} \frac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2} = -\frac{1}{2}$

$B_2 = \lim_{x\to 0} \frac{e^x((x-2)e^x+x+2)}{(e^x-1)^3} = \frac{1}{6}$

e così via. I numeri B_n così definiti sono noti come *numeri di Bernoulli*.

Il calcolo delle derivate e dei loro limiti è molto lento e non aiuta a congetturare relazioni generali tra i numeri B_n che ne permettano un calcolo più veloce. Un approccio più produttivo può essere trovato nel seguente modo.

Da

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n\geq 0} B_n \frac{x^n}{n!}$$

si ha

$$x = (e^x - 1)\sum_{n\geq 0} B_n \frac{x^n}{n!}$$

$$x \quad = \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)\left(B_0 + B_1 x + B_2\frac{x^2}{2!} + B_3\frac{x^3}{3!} + B_4\frac{x^4}{4!} + B_5\frac{x^5}{5!} + \cdots\right)$$

Quindi, moltiplicando tutti gli addendi della seconda somma per ogni addendo della prima,

$$\begin{aligned} x = \; & B_0 x + B_1 xx + B_2\frac{x^2}{2!}x + B_3\frac{x^3}{3!}x + B_4\frac{x^4}{4!}x + B_5\frac{x^5}{5!}x + \ldots \\ & + B_0\frac{x^2}{2!} + B_1 x\frac{x^2}{2!} + B_2\frac{x^2}{2!}\frac{x^2}{2!} + B_3\frac{x^3}{3!}\frac{x^2}{2!} + B_4\frac{x^4}{4!}\frac{x^2}{2!} + B_5\frac{x^5}{5!}\frac{x^2}{2!} + \ldots \\ & + B_0\frac{x^3}{3!} + B_1 x\frac{x^3}{3!} + B_2\frac{x^2}{2!}\frac{x^3}{3!} + B_3\frac{x^3}{3!}\frac{x^3}{3!} + B_4\frac{x^4}{4!}\frac{x^3}{3!} + B_5\frac{x^5}{5!}\frac{x^3}{3!} + \ldots \\ & + B_0\frac{x^4}{4!} + B_1 x\frac{x^4}{4!} + B_2\frac{x^2}{2!}\frac{x^4}{4!} + B_3\frac{x^3}{3!}\frac{x^4}{4!} + B_4\frac{x^4}{4!}\frac{x^4}{4!} + B_5\frac{x^5}{5!}\frac{x^4}{4!} + \ldots \\ & + B_0\frac{x^5}{5!} + B_1 x\frac{x^5}{5!} + B_2\frac{x^2}{2!}\frac{x^5}{5!} + B_3\frac{x^3}{3!}\frac{x^5}{5!} + B_4\frac{x^4}{4!}\frac{x^5}{5!} + B_5\frac{x^5}{5!}\frac{x^5}{5!} + \ldots \\ & + B_0\frac{x^6}{6!} + B_1 x\frac{x^6}{6!} + B_2\frac{x^2}{2!}\frac{x^6}{6!} + B_3\frac{x^3}{3!}\frac{x^6}{6!} + B_4\frac{x^4}{4!}\frac{x^6}{6!} + B_5\frac{x^5}{5!}\frac{x^6}{6!} + \ldots \\ & + \ldots \end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi, nel secondo membro B_0 deve essere uguale a 1 e tutti i coefficienti delle potenze di *x* devono essere nulli. Quindi

$B_0 = 1$

$B_0\frac{1}{2!} + B_1 = 0$

$B_0\frac{1}{3!} + B_1\frac{1}{2!} + B_2\frac{1}{2!} = 0$

$B_0\frac{1}{4!} + B_1\frac{1}{3!} + B_2\frac{1}{2!2!} + B_3\frac{1}{3!} = 0$

$B_0\frac{1}{5!} + B_1\frac{1}{4!} + B_2\frac{1}{3!2!} + B_3\frac{1}{2!3!} + B_4\frac{1}{4!} = 0$

$B_0 \frac{1}{6!} + B_1 \frac{1}{5!} + B_2 \frac{1}{4!2!} + B_3 \frac{1}{3!3!} + B_4 \frac{1}{2!4!} + B_5 \frac{1}{5!} = 0$

…

Le sequenze dei denominatori ottenuti coincidono con i denominatori degli sviluppi in fattoriali dei coefficienti binomiali

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Usando questa notazione, si vede che la *n*-esima riga calcolata può essere espressa come

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0$$

Dall'ultima delle identità scritte si ha inoltre

$B_5 \frac{1}{5!} = -\left(B_0 \frac{1}{6!} + B_1 \frac{1}{5!} + B_2 \frac{1}{4!2!} + B_3 \frac{1}{3!3!} + B_4 \frac{1}{2!4!}\right) =$

$= -\left(\frac{1}{6!}\binom{6}{0}B_0 + \frac{1}{6!}\binom{6}{1}B_1 + \frac{1}{6!}\binom{6}{2}B_2 + \frac{1}{6!}\binom{6}{3}B_3 + \frac{1}{6!}\binom{6}{4}B_4\right)$

Perciò

$$B_5 = -\frac{5!}{6!}\sum_{k=0}^{k=4}\binom{6}{k}B_k = -\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{k=4}\binom{6}{k}B_k$$

Generalizzando questo risultato, si ha una relazione che permette di calcolare ricorsivamente i numeri B_n per $n > 0$:

$$B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k$$

Da questa relazione si ottengono

$B_1 = -\frac{1}{2}\binom{2}{0}B_0 = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{1}{2}$

$B_2 = -\frac{1}{3}\left(\binom{3}{0}B_0 + \binom{3}{1}B_1\right) = -\frac{1}{3} \cdot \left(1 \cdot 1 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = +\frac{1}{6}$

$$B_3 = -\frac{1}{4}\left(\binom{4}{0}B_0 + \binom{4}{1}B_1 + \binom{4}{2}B_2\right) = -\frac{1}{4}\cdot\left(1\cdot 1 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right)\right) = 0$$

$$B_4 = -\frac{1}{5}\left(\binom{5}{0}B_0 + \binom{5}{1}B_1 + \binom{5}{2}B_2 + \binom{5}{3}B_3\right) = -\frac{1}{5}\cdot\left(1\cdot 1 + 5\left(-\frac{1}{2}\right) + \right.$$

$$\left. +10\left(\frac{1}{6}\right) + 10\cdot 0\right) = -\frac{1}{30}$$

$$B_5 = -\frac{1}{6}\left(\binom{6}{0}B_0 + \binom{6}{1}B_1 + \binom{6}{2}B_2 + \binom{6}{3}B_3 + \binom{6}{4}B_4\right) = -\frac{1}{6}\cdot$$

$$\left(1\cdot 1 + 6\left(-\frac{1}{2}\right) + 15\left(\frac{1}{6}\right) + 20\cdot 0 + 15\left(-\frac{1}{30}\right)\right) = 0$$

$$B_6 = -\frac{1}{7}\left(\binom{7}{0}B_0 + \binom{7}{1}B_1 + \binom{7}{2}B_2 + \binom{7}{3}B_3 + \binom{7}{4}B_4 + \binom{7}{5}B_5\right) = -\frac{1}{7}\cdot$$

$$\left(1\cdot 1 + 7\left(-\frac{1}{2}\right) + 21\left(\frac{1}{6}\right) + 35\left(-\frac{1}{30}\right)\right) = \frac{1}{42}$$

Dagli esempi proposti si osserva che per indici dispari $n \geq 3$ risulta $B_n = 0$.

Infatti, da

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = B_0 + B_1 x + B_2\frac{x^2}{2!} + B_3\frac{x^3}{3!} + B_4\frac{x^4}{4!} + B_5\frac{x^5}{5!} + B_6\frac{x^6}{6!} + \ldots$$

si ha

$$f(-x) = \frac{-x}{e^{-x} - 1} = B_0 - B_1 x + B_2\frac{x^2}{2!} - B_3\frac{x^3}{3!} + B_4\frac{x^4}{4!} - B_5\frac{x^5}{5!} + B_6\frac{x^6}{6!} + \ldots$$

e quindi

$$f(x) - f(-x) = 2B_1 x + 2B_3\frac{x^3}{3!} + 2B_5\frac{x^5}{5!} + 2B_7\frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$-x = -x + 2B_3\frac{x^3}{3!} + 2B_5\frac{x^5}{5!} + 2B_7\frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$B_3\frac{x^3}{3!} + B_5\frac{x^5}{5!} + B_7\frac{x^7}{7!} + \ldots = 0$$

vera solo se tutti i numeri di Bernoulli con indice dispari ≥ 3 sono nulli.

1.3 L'algoritmo di Ada Lovelace per i Numeri di Bernoulli

Augusta Ada Byron (Londra, 10 dicembre 1815 – Londra, 27 novembre 1852) è stata una matematica inglese, meglio nota come Ada Lovelace, nome che assunse dopo il matrimonio con William King, Conte di Lovelace.

La Byron era conosciuta soprattutto per il suo lavoro alla macchina analitica ideata da Charles Babbage. I suoi appunti sulla macchina includono quello che è conosciuto come il primo algoritmo ad essere elaborato da una macchina, tanto che lei è spesso ricordata come la prima programmatrice di computer al mondo.

L'algoritmo della Byron permette di calcolare i numeri di Bernoulli, senza dover calcolare tutti quelli a essi precedenti. Tuttora, quest' algoritmo è considerato un risultato brillante, non soltanto per la valenza computazionale, quanto per la coniugazione di Matematica ed Informatica. Esso è noto soprattutto per essere stato il primo programma della storia.

Secondo alcune fonti storiche, per la costruzione del suo programma, Ada Byron si servì della seguente funzione generatrice esponenziale:

$$\sum_{k=0}^{n} B_k \frac{x^n}{n!} \qquad (1.3.1)$$

opportunamente semplificata e modificata nell'espressione:

$$\frac{1}{2}\frac{2x-1}{2x+1} = B_2\frac{2x}{2} - B_4\frac{2x(2x-1)(2x-2)}{4!} + B_6\frac{2x(2x-1)\ldots(2x-4)}{6!} + \ \ldots \qquad (1.3.2)$$

Altre fonti non concordano con tale versione per diverse ragioni. In primo luogo perché, pur essendo vero che lo sviluppo della (1.3.1), insieme ad altri sviluppi in serie di funzioni trascendenti, contiene numeri di Bernoulli, come osservato dallo stesso Bernoulli nell'*Ars Conjectandi* e successivamente anche da Eulero e Stirling, non esiste tuttavia alcuna relazione matematica in grado di trasformare la (1.3.1) nella (1.3.2).

In secondo luogo, pare esistere una lettera della Byron scritta nel luglio del 1843, nella quale chiedeva a Babbage di inviarle la formula generatrice dei numeri di Bernoulli e non uno sviluppo che li contenesse (il che prevede anche una lista di numeri). Infine, sempre in base a tali fonti, la formula (1.3.2) utilizzata dalla Byron non è altro che una rielaborazione della seguente formula utilizzata da Bernoulli:

$$2n = (-1)^{k-1} \sum_{k=1}^{n} \binom{2n+1}{2k} 2^k B_{2k} \tag{1.3.3}$$

e che Ada Byron aveva studiato qualche anno prima, sotto la guida di De Morgan. Per confrontare la formula effettivamente utilizzata dalla Byron con la (1.3.3), è sufficiente riscrivere lo sviluppo di quest'ultima sostituendo *n* con *x* e sottraendo 1 da entrambi i membri dell'uguaglianza:

$$2x-1 = \binom{2x+1}{2} 2^2 B_2 - \binom{2x+1}{4} 2^4 B_4 + \binom{2x+1}{6} 2^6 B_6 - \dots$$

da cui, dividendo ciascun termine per il fattore $2(2x+1)$, si ottiene:

$$\frac{2x-1}{2(2x+1)} = \frac{\binom{2x+1}{2} 2^2 B_2}{2(2x+1)} - \frac{\binom{2x+1}{4} 2^4 B_4}{2(2x+1)} + \frac{\binom{2x+1}{6} 2^6 B_6}{2(2x+1)} - \dots \frac{-1}{2(2x+1)} \tag{1.3.4}$$

E' possibile riscrivere ciascun coefficiente binomiale che compare nella (1.3.4) in modo più semplice. Ad esempio per il primo coefficiente si ha:

$$\binom{2x+1}{2} = \frac{(2x+1)!}{2!(2x+1-2)!} = \frac{(2x+1)(2x)(2x-1)!}{2!(2x-1)!} = \frac{(2x+1)2x}{2}$$

oppure per il secondo si ha:

$$\binom{2x+1}{4} = \frac{(2x+1)!}{4!(2x-3)!} = \frac{(2x+1)(2x)(2x-1)(2x-2)}{4!}$$

Dunque, semplificando la (1.3.4), si perviene in definitiva alla:

$$\frac{2x}{2(2x+1)} = 2^3 B_4 \frac{2x(2x-1)(2x-2)}{4!} + 2^5 B_6 \frac{2x(2x-1)(2x-2)(2x-3)(2x-4)}{6!} - \dots \qquad (1.3.5)$$

dalla quale, per ricorsività e grazie al supporto di una macchina quale l'Analitycal Engine di Babbage, è assai facile generare progressivamente i numeri di Bernoulli B_n con n > 1, come la Byron stessa propose. In realtà, la Byron usò la formula (1.3.2) che differisce leggermente dalla (1.3.5) sia per l'alternanza dei segni sia per la presenza delle potenze dispari di 2, oltre che nel numeratore dell'uguaglianza, dove il fattore *2x* compare al posto del fattore $2x - 1$ della (1.3.5).

Mediante una congettura piuttosto geniale per quell'epoca, la Byron riuscì a generare i coefficienti incogniti B_n semplicemente mediante iterazioni successive, attribuendo ad *x* valori interi via via crescenti 1, 2, 3, … In questo modo, sostituendo $x = 1$, tanto nella (1.3.2) quanto nella (1.3.5), tutti i termini dello sviluppo contenenti $(2x - 2)$ si annullano, ossia tutti i termini dal secondo in poi. Ad esempio, per la (1.3.5) si ottiene:

$$\frac{2\cdot 1}{2(2\cdot 1+1)} = 2^1 B_2 \frac{2\cdot 1}{2!}$$

dalla quale risulta agevole ricavare $B_2 = \frac{1}{6}$. In modo analogo, attribuendo ad *x* il valore 2 si annullano invece tutti i termini che contengono il fattore $(2x - 4)$, ovvero tutti quelli a partire dal terzo:

$$\frac{2\cdot 2}{2(2\cdot 2+1)} = 2^1 B_2 \frac{2\cdot 2}{2!} - 2^3 B_4 \frac{2\cdot 2(2\cdot 2-1)(2\cdot 2-1)}{4!}$$

da cui una volta noto B_2, si ottiene il secondo coefficiente dello sviluppo B_4. Per $x = 3$ spariscono tutti i termini a partire dal quarto e così via per valori sempre crescenti di *x*.

Anche Bernoulli, un secolo prima della Byron, propose un procedimento analogo in base al quale partendo dallo sviluppo (1.3.3) e ponendo di volta in volta $n = 1, 2, 3, \ldots$ si riesce ad arrestare la somma e a calcolare ricorsivamente i coefficienti B_n.

Ad esempio, per $n = 1$, e di conseguenza $k = 1$, si ha:

$$2 = \binom{3}{2} 2^2 B_2$$

da cui si ricava immediatamente $B_2 = \frac{1}{6}$. Ovviamente il numero successivo significativo B_4 si ottiene arrestando lo sviluppo per $n = 2$ e dunque facendo variare *k* da 1 a 2

$$4 = \binom{5}{2} 2^2 B_2 - \binom{5}{4} 2^4 B_4$$

sapendo che $B_2 = \frac{1}{6}$, si ottiene $B_4 = \frac{1}{30}$. Dunque la vera innovazione introdotta dall'algoritmo della Byron rispetto al metodo di Bernoulli sta nell'aver usato ad ogni interazione la stessa formula, riuscendo a semplificarla di volta in volta al variare del valore dell'incognita *x*.

Il calcolo di ciascun numero, uno alla volta, costituisce il ciclo esterno del programma, mentre per calcolare ogni valore frazionario successivo si fa ricorso ad un ciclo secondario.

Riportiamo qui di seguito gli algoritmi proposti dalla Byron e da Bernoulli:

Algoritmo di Ada Byron

$$\frac{1}{2}\,\frac{2x-1}{2x+1} = B_2\,\frac{2x}{2} - B_4\,\frac{2x(2x-1)(2x-2)}{4!} + B_6\,\frac{2x(2x-1)\ldots(2x-4)}{6!} + \ldots$$

Algoritmo di Bernoulli

$$\frac{2x}{2(2x+1)} = 2^1 B_2 \frac{2x}{2!} - 2^3 B_4 \frac{2x(2x-1)(2x-2)}{4!} + 2^5 B_6 \frac{2x(2x-1)(2x-2)(2x-3)(2x-4)}{6!} - \dots$$

2.1 Il problema di Basilea

Il **problema di Basilea** è un famoso problema dell'analisi, proposto per la prima volta da Pietro Mengoli nel 1644 e risolto da Eulero nel 1735. Il problema aveva resistito agli attacchi dei più grandi matematici dell'epoca (Wallis, Leibniz e i fratelli Bernoulli) quindi la soluzione di Eulero (ancora ventottenne) suscitò stupore e ammirazione. Il problema di Basilea, nella sua forma più semplice, chiede di scoprire a che valore converge la somma degli inversi di tutti i quadrati dei numeri naturali, cioè la somma precisa della serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

Tale serie è approssimativamente uguale a $1{,}644934$. Il problema di Basilea chiede la somma esatta di questa serie (forma chiusa). Eulero dimostrò che la somma esatta è $\frac{\pi^2}{6}$ e annunciò questa scoperta nel 1735. Le sue dimostrazioni erano basate su passaggi non chiariti a pieno; per una dimostrazione rigorosa bisognerà aspettare fino al 1741.

Generalizzando, il problema di Basilea richiedeva di determinare la convergenza della serie con esponente *p*, cioè esaminiamo la serie generale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

ovvero

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \ldots$$

Essa è anche denominata *serie armonica generalizzata*. Converge se $p > 1$, mentre diverge per $p \leq 1$. La divergenza è evidente per il criterio del confronto con la serie armonica, difatti se $p < 1$, per $n \geq 1$, $n^p < n$ e quindi $\frac{1}{n} < \frac{1}{n^p}$. Eulero dimostrò per p pari fino ad $p = 26$ ottenendo i seguenti valori:

p	Valore di convergenza
2	$\frac{\pi^2}{6}$
4	$\frac{\pi^4}{90}$
6	$\frac{\pi^6}{945}$
$\cdots$	$\cdots$

Tabella 1

mentre nessuno riuscì a trovare valori per *n* dispari (almeno fino a quando non è stata studiata la Zeta di Riemann).

2.2 La zeta di Riemann come funzione reale di variabile reale

Il problema di Basilea prende il nome dalla città svizzera sede dell'università in cui insegnarono successivamente matematica i due fratelli Bernoulli (Jakob dal 1687 al 1705 e Johann dal 1705 al 1748).
La serie di Basilea è stata la porta di ingresso per la funzione zeta di Riemann. Infatti la zeta di Riemann, anch'essa studiata da Eulero per

numeri reali, è analoga alla serie di Basilea, solo che al posto di p Riemann pose s, intendendo s come numero complesso e quindi la studiò come funzione complessa di variabile complessa; ma se s ha solo parte reale allora coincidono.

Nel seguito, per introdurre la trattazione, ipotizziamo s come variabile reale e la zeta di Riemann come funzione reale di variabile reale, cioè coincidente con la serie di Basilea. Un modo per sintetizzare la zeta di Riemann come serie è il seguente:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Se $s = 1$ la serie diverge (serie armonica). Se, invece, $s > 1$ la serie converge (serie di Basilea). Se nella serie di Basilea (o zeta di Riemann di variabile reale) poniamo $s = 0$, la serie diverge ancora (perché n^0=1). Per valori negativi come $s = -1$ diverge ancora, perché ad esempio il termine $\frac{1}{2^{-1}} = 2$ e così otterrei la somma di tutti i numeri naturali. Se $s = \frac{1}{2}$, al denominatore abbiamo le radici quadrate e attraverso il criterio del confronto con la serie armonica, diverge anche in tal caso.

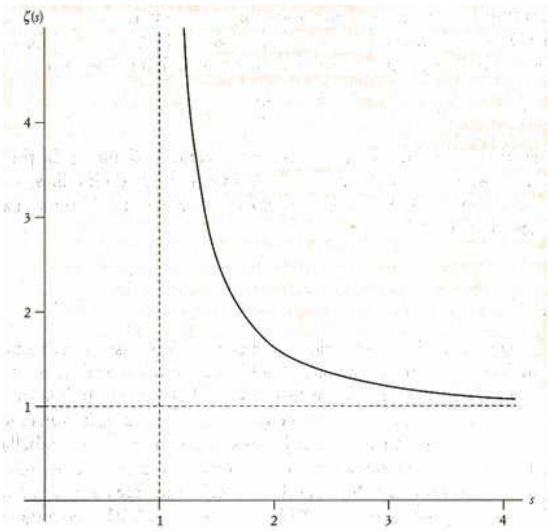

Figura 1. Andamento della zeta di Riemann nel campo reale

2.3 La zeta di Riemann come funzione complessa di variabile complessa

La funzione zeta di Riemann è una delle più importanti della matematica perché è in relazione con la distribuzione dei numeri primi. La funzione è definita per tutti i numeri complessi con la parte reale maggiore di 1 ed è espressa secondo la formula vista da Eulero e in generale nel seguente modo:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \qquad (2.3.1)$$

dove $s = a + ib$ con $s \in \mathbb{C}$ ovvero numero complesso, mentre il produttorio è sviluppato all'infinito rispetto a tutti i numeri primi. La seconda parte a destra dell'uguale è ricordata come "prodotto di Eulero". La parte destra della (2.3.1) esprime che la funzione zeta di Riemann è una serie costituita dalla "potenza complessa" di tutti i numeri naturali, mentre la parte a sinistra, ricavata già da Eulero in campo reale, mostra il legame esistente tra la serie e il prodotto dei numeri primi; questo in sostanza perché anche i numeri primi fanno parte dell'insieme dei numeri naturali.

La dimostrazione di come si giunge alla parte sinistra è mostrata di seguito ed è anche un elegante crivello di Eratostene in versione analitica che tiene però conto anche del numero naturale 1 (senza escluderlo). Difatti è:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \qquad (2.3.2)$$

Se nella (2.3.2) si moltiplica per $\frac{1}{2^s}$ si ottiene:

$$\frac{1}{2^s}\,\zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \dots \qquad (2.3.3)$$

Se alla (2.3.2) si sottrae la (2.3.3) si ottiene:

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\dots \qquad (2.3.4)$$

L’analogia col crivello di Eratostene, per setacciare numeri primi, è evidente; ad esempio nella (2.3.4) si sono eliminati i termini potenze di 2 o multipli di 2. Se si ripete il procedimento all’infinito anche per $\frac{1}{3^s}$, $\frac{1}{5^s}$, $\frac{1}{7^s}$ etc, si ottiene:

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\dots\zeta(s) = 1 \qquad (2.3.5)$$

Dalla (2.3.5) discende rapidamente la (2.3.1) osservando di avere a che fare con numeri primi.

Riemann riscoprì l’utilizzo della funzione zeta proprio mentre si interessava della distribuzione dei numeri primi ma la traslò dal campo reale a quello complesso.

2.4 Eulero: i Numeri di Bernoulli e la funzione zeta di Riemann

Il calcolo dei valori esatti della funzione zeta di Riemann è stato un compito piuttosto difficile: Eulero riuscì nel 1735 ad avere una formula esatta per la funzione zeta di 2. Il suo metodo si poteva applicare per tutti gli *s* pari:

$$\zeta(2) = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots=\frac{\pi^2}{6}\approx 1.645$$

La dimostrazione di questo fatto è la soluzione del problema di Basilea. La dimostrazione di Eulero è intelligente e originale. Essenzialmente egli suppose che le regole dei polinomi finiti fossero valide anche per le serie infinite. Naturalmente il ragionamento originale di Eulero richiede una dimostrazione di questo, ma anche senza giustificazione, semplicemente ottenendo un valore prossimo a quello ottenuto con il calcolo, egli poteva essere piuttosto sicuro della correttezza del suo risultato.

Per seguire la dimostrazione di Eulero, bisogna ricordare lo sviluppo in serie di Taylor della funzione seno centrato in 0:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ ...$$

Dividendo per x entrambi i termini, abbiamo:

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ ...$$

Le radici di questo polinomio sono $x = k\pi$ con k intero, dunque π, 2π, 3π….Poniamo ora $z = x^2$ e abbiamo:

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \ ...$$

Le radici di questo polinomio (per la sostituzione operata) sono: $\pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2$…Per le formule di Viète abbiamo che, se un polinomio ha il termine costante uguale a 1, la somma degli inversi delle sue radici è uguale al coefficiente del termine lineare cambiato di segno (in altre parole la somma degli inversi delle radici del polinomio $a_n x^n + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + bx + 1$ da come risultato $-b$). Supponiamo di poter applicare le regole dei polinomi finiti anche per questo polinomio infinito. Abbiamo che:

$$+\frac{1}{3!} = \frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \dots$$

Moltiplicando entrambi i termini per π^2 otteniamo:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \text{cvd}$$

Con procedimenti molto simili a quelli che aveva usato per il caso $s = 2$ Eulero riuscì a trovare la forma chiusa per la somma dell'inverso di qualsiasi potenza pari:

$$\zeta(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90} \approx 1.0823$$

$$\zeta(6) = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \ldots = \frac{\pi^6}{945} \approx 1.0173$$

Più in generale:

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1}\pi^{2k}B_{2k}}{(2k)!}$$

dove B_k è il k-esimo numero di Bernoulli. Invece il calcolo esatto dei valori dispari di *s* crea ancora enormi difficoltà. Non si conosce una formula esatta che renda i valori della funzione zeta in corrispondenza di *s* = 3 né per qualche altro valore dispari di *s*. Si conoscono solo i valori approssimati:

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots \approx 1.202$$

$$\zeta(5) = 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \ldots \approx 1.0369$$

$$\zeta(7) = 1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \ldots \approx 1.0083$$

Solo nel 1978 Roger Apéry riuscì a provare che $\zeta(3)$ è un numero irrazionale (per questo $\zeta(3)$ è chiamata costante di Apéry).

2.5 Legame tra i numeri di Bernoulli e la funzione zeta di Riemann

Vogliamo ora determinare la connessione fra i numeri di Bernoulli e la funzione zeta di Riemann, ovvero si desidera dimostrare il seguente teorema:

TEOREMA 2.5.1:

Sia n un numero intero e indichiamo con B_{2n} i numeri di Bernoulli. Sia ζ la funzione zeta di Riemann. Allora

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}B_{2n}}{(2n)!}.$$

Per rendere più agevole la dimostrazione, riportiamo di seguito definizioni, lemmi e corollari che verranno utilizzati in quest'ultima.

Tenendo presente le seguenti definizioni per le funzioni iperboliche:

1) $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$,
2) $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$,
3) $\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$

consideriamo:

***Lemma 2.5.1*:**

$$\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2}= \frac{z}{2}\coth\frac{z}{2}\,.$$

<u>*Dimostrazione*</u>:

$$\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2}=\frac{2z+z[e^z-1]}{2[e^z-1]}=\frac{2z-z+z[e^z]}{2[e^z-1]}=\frac{z}{2}\cdot\frac{e^z+1}{e^z-1}=\frac{e^{-z/2}}{e^{-z/2}}\cdot\frac{z}{2}\cdot\frac{e^z+1}{e^z-1}=$$

$$=\frac{z}{2}\cdot\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}}=\frac{z}{2}\cdot\coth\frac{z}{2}$$

***Corollario 2.5.1*:**

$$z\cdot\coth z=\sum_{n\geq 0}4^n B_{2n}\frac{(z)^{2n}}{(2n)!}$$

<u>*Dimostrazione:*</u>

Dal lemma 2.5.1) abbiamo:

$$\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2}= \frac{z}{2}\coth\frac{z}{2}\,.$$

Poiché

$$\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2}= \sum_{n\geq 0, n\neq 1}B_n\frac{z^n}{n!}$$

in quanto il termine $B_1\frac{z^1}{1!}$ è uguale a $-\frac{z}{2}$; si deduce che :

$$\frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2}= \sum_{n\geq 0}B_{2n}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Sostituendo *2z* con *z*, otteniamo:

$$\frac{2z}{e^{2z}-1}+z=z\cdot\coth z=\sum_{n\geq 0}B_{2n}\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n\geq 1}4^nB_{2n}\frac{(z)^{2n}}{(2n)!}$$

***Lemma 2.5.2*:**

$$\cot x=i\coth(ix)$$

<u>*Dimostrazione:*</u>

Poiché $e^{ix}=i\sin x+\cos x$ possiamo fare le seguenti sostituzioni:

$$\cosh ix=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\frac{i\sin x+\cos x+i\sin(-x)+\cos(-x)}{2}$$

$$=\frac{2\cos x}{2}=\cos x$$

$$\sinh ix=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}=\frac{i\sin x+\cos x-i\sin(-x)-\cos(-x)}{2}$$

$$=\frac{2i\sin x}{2}=i\sin x$$

perciò:

$$i\coth ix=i\frac{\cosh ix}{\sinh ix}=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$$

Lemma 2.5.3:

$$\mathrm{z}\cot z=\sum_{n\geq 0}(-4)^n B_{2n}\frac{(z)^{2n}}{(2n)!}$$

dove i B_i sono *i numeri di Bernoulli.*

<u>*Dimostrazione:*</u>

Per il corollario 2.5.1):

$$z \cdot \coth z = \sum_{n \geq 0} B_{2n} \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$$

Considerando il lemma 2.5.2), si ottiene:

$$z \cdot \cot z = zi \coth(iz) = \sum_{n \geq 0} B_{2n} \frac{(2iz)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n \geq 1} (-4)^n B_{2n} \frac{(z)^{2n}}{(2n)!}$$

Lemma 2.5.4:

$$\cot z = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n - 1} \cot \frac{z + k\pi}{2^n}$$

<u>*Dimostrazione:*</u>

consideriamo il caso $n = 1$; abbiamo

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{1} \cot \frac{z + k\pi}{2} = \frac{1}{2} \cot \frac{z}{2} + \frac{1}{2} \cot \frac{z + \pi}{2}$$

Poiché :

$$\cot \left(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = - \tan \frac{z}{2}$$

si ha:

$$\frac{1}{2} \cot \frac{z}{2} + \frac{1}{2} \cot \left(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\cot \frac{z}{2} - \tan \frac{z}{2} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\cos \left({}^{z}/_{2} \right)}{\sin \left({}^{z}/_{2} \right)} - \frac{\sin \left({}^{z}/_{2} \right)}{\cos \left({}^{z}/_{2} \right)} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\cos^2\left({}^{z}/_{2} \right) - \sin^2\left({}^{z}/_{2} \right)}{\sin\left({}^{z}/_{2} \right) \cos\left({}^{z}/_{2} \right)} \right] = \frac{\frac{1}{2} \cos z}{\sin\left({}^{z}/_{2} \right) \cos\left({}^{z}/_{2} \right)}$$

considerato che $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$, otteniamo:

$$\frac{\frac{1}{2} \cos z}{\sin\left({}^{z}/_{2} \right) \cos\left({}^{z}/_{2} \right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos z}{{}^{1}/_{2} \sin z} = \frac{\cos z}{\sin z} = \cot z$$

Assumiamo ora :

$$\cot z = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \cot \frac{z + k\pi}{2^n} \, ,$$

per $n \geq 1$. Usiamo

$$\cot(2x) = \frac{1}{2} [\cot x - \tan x]$$

e abbiamo

$$\cot z = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \cot \frac{z + k\pi}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left[\cot \frac{z + k\pi}{2^{n+1}} - \frac{\tan z + k\pi}{2^{n+1}} \right]$$

dal momento che $-\tan x = \cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, otteniamo:

$$\cot z = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left[\cot \frac{z + k\pi}{2^{n+1}} + \cot\left(\frac{z + k\pi}{2^{n+1}} + \frac{\pi}{2} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left[\cot \frac{z + k\pi}{2^{n+1}} + \cot\left(\frac{z + (k + 2^n)\pi}{2^{n+1}} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left[\cot \frac{z + k\pi}{2^{n+1}} \right] + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left[\cot \frac{z + (k + 2^n)\pi}{2^{n+1}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left[\cot \frac{z + k\pi}{2^{n+1}} \right] + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \left[\cot \frac{z + k\pi}{2^{n+1}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} \left[\cot\frac{z+k\pi}{2^{n+1}}\right]$$

Corollario 2.5.2:

$$z\cot z = 1 - 2\sum_{k\geq 1}\frac{z^2}{k^2\pi^2 - z^2}$$

Lemma 2.5.5:

$$\lim_{z\to 0} z\cot z = 1.$$

***Lemma 2.5.6*:**

$$\frac{z^2}{k^2\pi^2 - z^2} = \sum_{i\geq 1}\frac{z^{2i}}{k^{2i}\pi^{2i}}$$

<u>Dimostrazione:</u>

Ricordando i seguenti sviluppi:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ \ldots$$

$$\frac{x}{1-x} = x + x^2 + \ x^3 + \cdots$$

Sia $x = \frac{z^2}{k^2\pi^2}$; sostituendo,otteniamo:

$$\frac{\left(z^2/_{k^2\pi^2}\right)}{1-\left(z^2/_{k^2\pi^2}\right)} = \frac{\left(\frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)}{\left(\frac{k^2\pi^2 - z^2}{k^2\pi^2}\right)} = \frac{z^2}{k^2\pi^2 - z^2}$$

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema precedentemente enunciato e che mette in evidenza la connessione tra i numeri di Bernoulli e la funzione zeta di Riemann:

<u>Dimostrazione teorema 2.5.1:</u>

Per il corollario 2.5.2) :

$$z\cot z = 1 - 2\sum_{k\geq 1} \frac{z^2}{k^2\pi^2 - z^2}.$$

Applicando il lemma 2.5.6), possiamo anche scrivere:

$$z\cot z = 1 - 2\sum_{k\geq 1}\left[\frac{z^2}{k^2\pi^2} + \frac{z^4}{k^4\pi^4} + \frac{z^6}{k^6\pi^6} + \cdots\right].$$

Dal momento che per ciascuna somma, k può assumere tutti i valori maggiori o uguali a 1, possiamo sostituire la sommatoria $\sum_{\mathrm{k}\geq 1}$ con

$$\mathrm{zcot}\, z = 1 - 2\left[\frac{z^2\zeta(2)}{\pi^2} + \frac{z^4\zeta(4)}{\pi^4} + \frac{z^6\zeta(6)}{\pi^6} + \cdots\right].$$

Per il lemma 2.5.3)

$$\mathrm{zcot}\, z = \sum_{n\geq 0}(-4)^n B_{2n}\frac{(z)^{2n}}{(2n)!} = B_0 + \sum_{n\geq 1}(-4)^n B_{2n}\frac{(z)^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= 1 + \sum_{n\geq 1}(-4)^n B_{2n}\frac{(z)^{2n}}{(2n)!}$$

Uguagliando le ultime due equazioni, si ottiene la relazione:

$$-2\left[\frac{z^2\zeta(2)}{\pi^2} + \frac{z^4\zeta(4)}{\pi^4} + \frac{z^6\zeta(6)}{\pi^6} + \cdots\right] = \sum_{n\geq 1}(-4)^n B_{2n}\frac{(z)^{2n}}{(2n)!}$$

Quest'ultima ci da per ogni termine $i \geq 1$

$$-2z^{2i}\frac{\zeta(2i)}{\pi^{2i}} = (-4)^i B_{2i}\frac{z^{2i}}{(2i)!}$$

Esplicitando $\zeta(2i)$ si ottiene

$$\zeta(2i) = (-4)^i B_{2i} \frac{\pi^{2i}}{(2i)!\,(-2)} = (-1)^{i-1} \frac{(2^{2i-1}\pi^{2i}B_{2i})}{(2i)!}$$

I POLINOMI DI BERNOULLI

3.1 Polinomi di Bernoulli

Accanto ai numeri di Bernoulli è possibile prendere in esame i *polinomi di Bernoulli* che si possono considerare una loro generalizzazione.

Definizione :

I polinomi di grado k denotati con $B_k(x)$ *e definiti ricorsivamente mediante le seguenti relazioni:*

$$\begin{cases} B_0(x) = 1 \\ B'_k(x) = k\, B_{k-1}(x) \\ \int_0^1 B_k\,(x)dx = 0 \end{cases} \qquad (3.1.1)$$

con k = 1, 2, …, sono chiamati "Polinomi di Bernoulli".

Vediamo alcuni esempi e costruiamo il loro grafico. Si ha

$B_0(x) = 1,$

$B_1(x) = x - \frac{1}{2},$

$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$

$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\ ,$

$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}\ ,$

$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x\ ,$

…

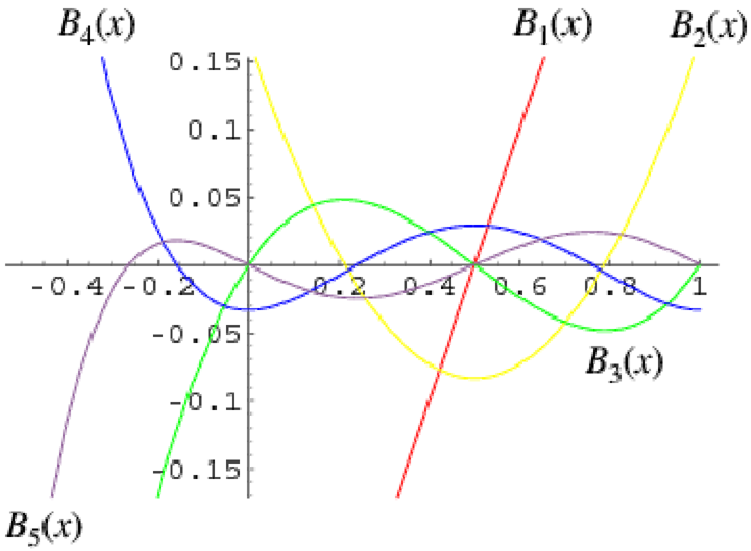

Figura 2

Si osservi che per le proprietà definenti i polinomi di Bernoulli deve aversi $B_k(0) = B_k(1)$ per $n \geq 2$. Si dice k-esimo numero di Bernoulli il numero razionale $B_k = B_k(0)$, cioè il k-esimo numero di Bernoulli è il termine noto del k-esimo polinomio di Bernoulli.

Consideriamo la sequenza di polinomi $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \ldots$definita mediante

$$\begin{cases} p_0(x) = 1 \\ p_k'(x) = k\, p_{k-1}(x) \end{cases} \tag{3.1.2}$$

e

$$\int_0^1 p_k(x)dx = 0 \tag{3.1.3}$$

con k = 1, 2, … Questa sequenza di polinomi, detta sequenza di Appell, è unica in quanto ogni p_k viene determinato dalla formula

$$p_k(x) = c + k \int_0^x p_{k-1}(t)dt \qquad k = 1, 2, \ldots$$

e a sua volta p_{k-1} è determinato in modo unico dalle condizioni precedenti.

Introduciamo ora la serie di potenze in *t*:

$$g(x,t) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(x)}{k!} t^k; \qquad (3.1.4)$$

nell'ipotesi che il raggio di convergenza di questa serie sia positivo $\forall x \in [0,1]$, possiamo derivare sotto il segno di serie ottenendo così

$$g(x,t) \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k^{'}(x)}{k!} t^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_{k-1}(x)}{(k-1)!} t^k = t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(x)}{k!} t^k \qquad (3.1.5)$$

Integrando l'equazione alle derivate parziali e uguagliando primo e ultimo membro della (3.1.5), risulta

$$g(x,t) = f(t)e^{tx} \qquad (3.1.6)$$

dove *f(t)* è una funzione indipendente da *x*. Determiniamo la *f(t)* integrando rispetto a *x* la (3.1.4) ed applicando le condizioni (3.1.2) e (3.1.3), sempre nelle ipotesi che il raggio di convergenza sia positivo $\forall x \in [0,1]$, otteniamo

$$\int_0^1 g(x,t)dx = \sum_{k=0}^{\infty} (\int_0^1 \frac{p_k(x)}{k!} dx) t^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \int_0^1 p_k\,(x)dx) = 1 \qquad (3.1.7)$$

$\forall t \in \mathbb{R}$; allo stesso modo integrando la (6) rispetto a *x* con $t \neq 0$ si ottiene

$$\int_0^1 g(x,t)dx = f(t)\,\frac{e^t - 1}{t} \qquad (3.1.8)$$

Adesso uguagliando la (3.1.7) con la (3.1.8), al secondo membro, risulta

$$f(t) = \frac{t}{e^t - 1}$$

Quindi

$$g(x,t) = \frac{te^{xt}}{e^t - 1}$$

esprimendo così la definizione dei polinomi di Bernoulli mediante funzione generatrice.

Esponiamo ora alcune definizioni equivalenti dei polinomi di Bernoulli.

Consideriamo la definizione dei polinomi di Bernoulli mediante la funzione generatrice:

$$F(x,t) = \begin{cases} e^{xt}\frac{t}{e^t-1}, & se\ t \neq 0 \\ 1 & se\ t = 0 \end{cases} \qquad (3.1.9)$$

con *x* numero complesso fissato. Osserviamo che la funzione *F(x,t)* è analitica nel disco { |t| < 2π} in quanto $\forall k \in \mathbb{Z}$ i punti $t = 2k\pi i$ sono zeri semplici della funzione $e^{xt} - 1$, quindi $t = 0$ è una singolarità eliminabile della funzione (3.1.9), risulta

$$\lim_{t\to o} \frac{t}{e^t - 1} = 1.$$

La funzione *F(x,t)*, dunque, può essere espressa mediante uno sviluppo in serie di potenze di t con coefficienti dipendenti dal numero complesso *x*:

$$e^{xt}\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n$$

e dopo semplici sostituzioni otteniamo:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k\, x^{n-k}$$

dove $B_n(x)$ è il polinomio di Bernoulli di grado *n*.

3.2 Proprietà dei polinomi di Bernoulli.

Le definizioni sopra citate per i polinomi di Bernoulli ci permettono di ricavare delle importanti proprietà.

Per determinarle, vediamo innanzi tutto come si comporta con la somma di due elementi:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x+y)}{n!}z^n = e^{(x+y)z}\frac{z}{e^z-1} = \left(\frac{ze^{xz}}{e^z-1}\right)e^{yz}$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}z^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}z^n\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k(x)}{k!}\cdot\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k(x)\cdot y^{n-k}\right)\frac{z^n}{n!}$$

per l'unicità dello sviluppo di Taylor:

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k(x)\cdot y^{n-k}$$

(sono simmetrici nelle due variabili); questa relazione vale $\forall x, y \in \mathbb{C}$ quindi in particolare:

$$B_n(x+1) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k(1)\cdot x^{n-k} \quad \Longrightarrow \quad B_n(x+1)$$

$$= \sum_{\substack{k=0\\k\neq 1}}^{n}\binom{n}{k}B_k\cdot x^{n-k} + \frac{n}{2}x^{n-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\cdot x^{n-k} + nx^{n-1} = B_n(x) + nx^{n-1}$$

Possiamo riscrivere quest'ultima relazione come:

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1} \tag{3.2.1}$$

ovvero:

Proprietà 1 (Teorema delle differenze)

$B_n(x+1) - B_n(x) = n\,x^{n-1}$ per $n \geq 0$.

Derivando quest'ultima in senso classico rispetto alla variabile x, per n fissato si ottiene:

$B_n'(x+1) - B_n'(x) = n(n-1)x^{n-2} = n\left[B_{n-1}(x+1) - B_{n-1}(x)\right] \quad \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \quad B_n'(x+1) - nB_{n-1}(x+1) = B_n'(x) - nB_{n-1}(x)$

Osservando che la derivata di un polinomio è un polinomio, e che quindi i due membri non sono altro che lo stesso polinomio calcolato in due punti diversi, si ricava che

$$B_n'(x) - nB_{n-1}(x) = C_n, \qquad \text{con } C_n \text{ costante.}$$

Per conoscere il valore di tale di tale costante basta valutare ad esempio in $x = 0$ l'espressione, ottenendo:

$B_n'(0) = \binom{n}{n-1}B_{n-1} = nB_{n-1} \qquad \Longrightarrow \quad C_n = nB_{n-1} - nB_{n-1} = 0$

In sintesi, abbiamo la seguente proprietà:

Proprietà 2 (Derivazione)

$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x) \qquad \text{per } n \geq 1$$

Inoltre dalla definizione sopra riportata discende che:

Proprietà 3 (Valori al bordo nell'intervallo [0, 1])

$B_n = B_n(0) = B_n(1)$ per $n \geq 1$

$B_{2n+1}(0) = 0$ per $n \geq 1$

Proprietà 4 (Integrazione)

$\int_0^1 B_n(t)dt = 0$ per $n \geq 1$

Proprietà 5 (Valore in x = $\frac{1}{2}$)

$B_n\left(\frac{1}{2}\right) = -(1 - 2^{1-n})B_n$ per $n \geq 1$

Proprietà 6 (Simmetria)

$B_n(1 - x) = (-1)^n B_n(x)$ per $n \geq 0$

<u>*Dimostrazione:*</u>

La proprietà è vera per $n = 1$; supponiamo sia vera per n fissato e procediamo per induzione.

$$B_n(1 - x) = (-1)^n B_n(x) \quad \Longrightarrow \quad \int B_n(1 - x)dx = (-1)^n \int B_n(x) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad -B_{n+1}(1 - x) = (-1)^n B_{n+1}(x) + \mathrm{C} \quad \Longrightarrow$$

$$-\int_0^1 B_{n+1}(1 - x)\, dx = (-1)^n \int_0^1 (B_{n+1}(x) + \mathrm{C})\, dx$$

Per la definizione data

$$0 = 0 + C \quad \Longrightarrow \quad C = 0$$

perciò

$$-B_{n+1}(1 - x) = (-1)^n B_{n+1}(x) \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad B_{n+1}(1 - x) = (-1)^{n+1} B_{n+1}(x)$$

per induzione è vera per ogni *n*.

Dalla proprietà di simmetria segue in particolare che $B_n = (-1)^n B_n(1)$ e per quanto osservato

$$B_n = 0, \text{ per } n = 3, 5, 7, \ldots \tag{3.2.2}$$

3.3 Applicazioni

Vediamo ora come i polinomi di Bernoulli possano essere usati per determinare la somma delle potenze k-esime dei primi n interi.

Fissati $m, n, r \geq 0$ interi, consideriamo un incremento del tipo $B_{r+1}(n) - B_{r+1}(m)$; per usare la (3.2.1), spezziamo l'intervallo $[m,\ n]$ in intervalli unitari:

$$B_{r+1}(n) - B_{r+1}(m) = \sum_{k=m}^{n-1}\left(B_{r+1}(k+1) - B_{r+1}(k)\right) = \sum_{k=m}^{n-1}(r+1)k^r =$$

$$= (r+1)\sum_{k=m}^{n-1}k^r \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=m}^{n-1}k^r = \frac{B_{r+1}(n) - B_{r+1}(m)}{r+1}$$

In particolare per $r = 1$ ed $m = 1$ abbiamo:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots .(n-1) = \frac{B_2(n) - B_2(1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

ovvero si ottiene la formula per calcolare la somma dei primi *n* numeri naturali (quest'ultima fu determinata da Gauss all'età di otto anni);

mentre per $r = 2$ ed $m = 1$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{B_3(n) - B_3(1)}{3}$$

$$= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

3.4 Legame tra i polinomi di Bernoulli e la funzione zeta di Riemann

Poniamo $\widetilde{B_n}(x) = B_n(x - [x])$. Le funzioni $\widetilde{B_n}(x)$ sono evidentemente periodiche e coincidono con $B_n(x)$ per $x \in (0, 1)$.

Sia $\lambda > 0$ un numero reale qualsiasi. Consideriamo la funzione

$\zeta_\lambda(s) = \lambda^{-s} + (\lambda+1)^{-s} + (\lambda+2)^{-s} + \cdots$, con $s = \sigma + it \in \mathbb{C}, \sigma > 1$.

Si noti che $\zeta_1(s) = \zeta(s)$. Il comportamento della funzione $\zeta_\lambda(s)$ "non dipende da λ", nel senso del risultato seguente che fornisce in particolare l'estensione meromorfa a $\mathbb{C}$ della funzione zeta di Riemann.

TEOREMA 3.4.1:

La funzione $\zeta_\lambda(s)$ si estende meromorficamente a $\mathbb{C}$ con un solo polo semplice in $s = 1$.

<u>*Dimostrazione:*</u>

Supponiamo $\sigma > 1$. Poniamo $f(x) = (x+\lambda)^{-s}$ con $x \in [0, \infty)$. Si noti che f e tutte le sue derivate tendono a 0 per $x \to \infty$ e sono integrabili nell'intervallo $[0, \infty)$. Otteniamo una rappresentazione integrale per $\zeta_\lambda(s)$ scrivendo

$$\zeta_\lambda(s) = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots =$$

$$= [f(0) - f(1)] + 2[f(1) - f(2)] + \cdots =$$

$$= -\int_0^\infty ([x]+1) f'(x)dx =$$

$$= \int_0^\infty \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x)dx - \int_0^\infty x f'(x)dx - \frac{1}{2}\int_0^\infty f'(x)dx$$

Osserviamo che

$$I_1 = \int_0^\infty \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'(x)dx = \int_0^\infty \widetilde{B_1}(x)\, f'(x)dx$$

$$I_2 = -\int_0^\infty x f'(x)dx = \int_0^\infty f(x)dx = \lambda^{1-s}/(s-1)$$

$$I_3 = -\frac{1}{2}\int_0^\infty xf'(x)dx = \frac{1}{2}f(0) = \lambda^{-s}/2$$

Per calcolare I_1 si osservi che

$$\int_0^\infty \frac{\widetilde{B_n}(x)}{n!} f^{(n)} dx = \int_0^\infty \frac{d}{dx}\left(\frac{\widetilde{B_{n+1}}(x)}{(n+1)!}\right) f^{(n)}(x)dx =$$

integrando per parti

$$= -\frac{B_{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(0) - \int_0^\infty \frac{\widetilde{B_{n+1}}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x)dx$$

Iterando il calcolo, e ricordando la (3.2.2) otteniamo la formula seguente, valida per ogni $r \geq 1$,

$$I_1 = -\frac{B_2}{2!}f'(0) - \frac{B_4}{4!}f'''(0) - \ldots - \frac{B_{2r}}{(2r)!!}f^{(2r-1)}(0)$$
$$- \int_0^\infty \frac{\widetilde{B_{2r+1}}(x)}{(2r+1)!} f^{(2r+1)}(x)dx$$

Riprendendo la rappresentazione integrale per $\zeta_\lambda(s)$ ottenuta sopra, si ha $\zeta_\lambda(s) = \frac{\lambda^{1-s}}{s-1} + \frac{\lambda^{-s}}{2} + \frac{B_2}{2!} s\lambda^{-s-1} + \frac{B_4}{4!} s(s+1)(s+2)\lambda^{-3-s} - \ldots -$

$$-s(s+1)\ldots(s+2r)\int_0^\infty \frac{\widetilde{B_{2r+1}}(x)}{(2r+1)!}(x+\lambda)^{-s-2r-1}(x)dx \qquad (3.4.1)$$

Ciascuno degli addendi è definito per ogni $s \in \mathbb{C}$. L'integrale converge per $\sigma > -2r$ e definisce una funzione olomorfa nella variabile s in quella regione. Iterando ripetutamente la formula, cioè prendendo $r \to \infty$, si ottiene l'estensione cercata di $\zeta_\lambda(s)$. Si noti che si ha una singolarità in $s = 1$.

E' interessante osservare che l'espressione (3.4.1) permette di calcolare facilmente alcuni valori speciali di $\zeta_\lambda(s)$. Ad esempio, $\zeta_\lambda(0) = -\lambda + \frac{1}{2}$ e

$\zeta_\lambda(-1) = -\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{12}$, da cui segue immediatamente (ponendo $\lambda = 0$) che

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \qquad \zeta(-1) = -\frac{1}{12}\ .$$

Più generalmente vale la formula

TEOREMA 3.4.2:

Per $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\zeta_\lambda(1-n) = -\frac{1}{n} B_n(\lambda)$.

<u>*Dimostrazione:*</u>

Osserviamo che l'espansione di Taylor in $x = 0$ di $B_n(x)$ è $B_n(x) = B_0 x^n + +\binom{n}{1} B_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} B_2 x^{n-2} + \cdots + B_n$. D'altra parte, dalla (3.4.1) per $r \gg 0$ segue che

$$\zeta_\lambda(1-n) = -\frac{\lambda^n}{n} + \frac{\lambda^{n-1}}{2} - \frac{B_2}{2!}(n-1)\lambda^{n-2}$$
$$- \frac{B_4}{4!}(n-1)(n-2)(n-3)\lambda^{n-4} - \cdots$$

E quindi $-n\zeta_\lambda(1-n) = B_n(\lambda)$.

Ponendo $\lambda = 0$, la formula del teorema 2 fornisce il valore della funzione $\zeta(s)$ agli interi negativi. In particolare, ricordando la (1), si ottiene subito

$$\zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6) = \cdots = 0.$$

Questi sono detti zeri banali della funzione $\zeta(s)$.

Bibliografia:

[1] Storia della Matematica, Carl Boyer, Mondadori, ISBN 88-04-33431-2;

[2] J.H. Conway, Richard K.Guy, Il libro dei numeri, Hoepli,1999;

[3] Elementi di matematica discreta, D. Romagnoli, quaderno didattico #23 Dipartimento di matematica di Torino, Gennaio 2004;

[4] Una introduzione alla teoria delle funzioni L in aritmetica, A.Mori, quaderno didattico #11 Dipartimento di matematica di Torino, Novembre 2001;

[5] Bernoulli Numbers and their Applications, James B Silva;

[6] Sviluppi di funzioni lisce in polinomi di Bernoulli, Chiara Pittari, Università degli studi della Calabria, 2005;

[7] The Bernoulli Numbers, John C. Baez, Dicembre 2003;

Pagine web consultate:

[1] www2.dm.unito.it/paginepersonali/romagnoli/numeri.pdf;

[2] xoomer.virgilio.it/diegooneoone/matematica/bernoulli_eulero.doc;

[3] http://www.robertobigoni.it/Matematica/FTrascendenti/Funzioni8.htm;

[4] http://it.wikipedia.org/wiki/Numeri_di_Bernoulli;

[5] http://it.wikipedia.org/wiki/Algoritmo_di_Ada_Lovelace_per_i_numeri_di_Bernoulli;

[6] http://www.sapere.it/enciclopedia/Bernoulli.html;

[7] http://lan.unical.it/Persone/Dellaccio/todaro.pdf;

[8] http://www.rudimathematici.com/blocknotes/pdf/RT01.pdf;

[9] http://claudiosoftware.interfree.it/doc/tesi/tesiBracciali.pdf;

[10] http://www.encyclopedia.it/n/nu/numeri_di_bernoulli.html

[11] http://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_number;

[12] http://mathworld.wolfram.com/BernoulliNumber.html;

[13] http://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_zeta_di_Riemann;

[14] http://digilander.libero.it/MarcelloSeri/Presentazione.pdf;

[15] http://digilander.libero.it/roberto20129/matematica/funzionezeta.html;

[16] http://it.wikipedia.org/wiki/Problema_di_Basilea;

[17] http://www.matematicamente.it/staticfiles/curiosa/Colognesi-Bella-dentro.pdf;

[18] http://mathworld.wolfram.com/BernoulliNumber.html;

[19] http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/bernoulli.html;

[20] http://fermatslasttheorem.blogspot.com/2006/10/bernoulli-numbers-and-riemann- zeta.html;

[21] http://fermatslasttheorem.blogspot.com/2006/10/bernoulli-numbers.html;

[22] http://fermatslasttheorem.blogspot.com/2006/10/generating-function-for-bernoulli.html;