Docente: **LUCIO CADEDDU**

SSD: **MAT/05**
Codifica dell'Ateneo:

Tipologia:
Integrato: NO

Anno di corso **1° magistrale**
Semestre **1°**
Sede lezioni: **Dipartimento di Matematica e Informatica, Via Ospedale 72, Cagliari**

CFU: **8** (64 ore frontali)

Prerequisiti

Programma tradizionale dei corsi di Analisi 1, 2, 3 e 4. Conoscenze di base di geometria (spazi vettoriali, applicazioni lineari, ecc.) e algebra. Conoscenze di base sulla modellizzazione matematica di problemi fisici (es. corda vibrante).

Propedeuticità

Nessuna

Obiettivi formativi

Apprendimento dei concetti base della misura e dell'integrazione di Lebesgue. Generalità sugli spazi funzionali e spazi L^p in particolare. Conoscenza della trasformata di Fourier e sue applicazioni a problemi concreti (EDP e teoria dei segnali). Apprendimento delle basi per lo studio delle principali proprietà (ed applicazioni) della teoria delle funzioni di una variabile complessa.

Descrittori europei

CONOSCENZA E CAPACITA' DI COMPRENSIONE

- Un obiettivo del corso è l'apprendimento di alcune nozioni avanzate dell'Analisi Matematica. Più precisamente i risultati attesi riguardano inizialmente la comprensione del concetto di misura di Lebesgue, di integrale di Lebesgue e delle sue principali applicazioni. Questa conoscenza di base viene successivamente applicata alla conoscenza di spazi funzionali (L^p). Il lavoro di sintesi della conoscenza di tali strumenti ha uno sbocco naturale nello studio della trasformata di Fourier e di alcune sue naturali applicazioni nel campo delle equazioni alle derivate parziali che modellizzano problemi fisici ed ingegneristici. Questo aspetto cardine dell’Analisi Matematica ha molteplici applicazioni nello studio delle Scienze Applicate, in quanto i fenomeni naturali sono descritti e modellizzati utilizzando funzioni di variabile reale e le loro proprietà. La comprensione e lo studio di questi “modelli” passa necessariamente attraverso un processo di sintesi utilizzante i suddetti strumenti matematici.

CAPACITA’ APPLICATIVE

- Il corso si propone come obiettivo il raggiungimento di una certa autonomia operativa nell’affrontare problemi concreti, derivanti da modellizzazioni di fenomeni reali, e la successiva formalizzazione matematica. Da questo punto di vista il corso mira a stimolare la capacità di saper intersecare teoria con pratica, in un processo armonico di “applicazione della conoscenza” che rende la comprensione dei problemi più organica e schematica, come richiesto per interpretare al meglio le numerose interazioni con altre discipline scientifiche. Inoltre, viene posto l’accento sulla possibilità di risolvere problemi pratici mediante una serie di strumenti differenti. Ad esempio la risoluzione di alcune particolari famiglie di integrali di una variabile reale viene affrontata utilizzando sia alcuni potenti risultati di passaggio al limite sotto il segno d’integrale sia tecniche di calcolo di residui proprie dell’analisi complessa.

AUTONOMIA DI GIUDIZIO

- Il corso stimola gli studenti a lavorare in maniera autonoma anche ai fini di poter utilizzare fonti di informazione alternative al materiale didattico fornito dal docente. Tali fonti potranno essere altro materiale didattico a disposizione in rete, software di calcolo simbolico, esercitazioni interattive via web su problemi di analisi matematica reale e complessa. Durante le esercitazioni in aula lo studente è invitato a proporre metodi di risoluzione degli esercizi alternativi a quelli del docente, onde rendere la sua capacità di *problem solving* maggiormente svincolata dai metodi proposti dal docente in aula.

ABILITÀ NELLA COMUNICAZIONE

- Il corso si pone come obiettivo il raggiungimento di un punto di pareggio tra comprensione di un argomento e sua esposizione secondo il rigore formale richiesto dall’Analisi Matematica. La frequente dicotomia tra “saper fare” e “saper comunicare”, nel campo della Matematica, è uno dei più grossi ostacoli che limitano il trasferimento di conoscenza. Per questa ragione la prova di verifica della preparazione dello studente verte su di una esposizione orale su alcuni argomenti “chiave” del corso. È in questo modo che lo studente può dimostrare di aver fatto sue le conoscenze richieste e, di conseguenza, di essere in grado di trasferirle verso terze parti. Un ulteriore stimolo a migliorarsi nelle capacità di comunicazione è fornito dalle esercitazioni alla lavagna in aula, dove lo studente è chiamato a spiegare ai colleghi le modalità con le quali si può svolgere un esercizio o una dimostrazione proposti dal docente e di commentare passo passo tutti i procedimenti seguiti.

CAPACITÀ DI APPRENDERE

- L'organizzazione del corso e delle lezioni frontali è stata pensata per stimolare lo studente a lavorare ricostruendo con lavoro personale alcuni *tasselli mancanti* lasciati appositamente dal docente. Questo sistema è fondamentale per stimolare la capacità di apprendere i concetti e metabolizzarli, integrando con lavoro personale il proprio percorso formativo. Come sottoprodotto ciò stimola la capacità di utilizzare il metodo scientifico di indagine, soprattutto in relazione a problemi applicativi modellizzati con gli strumenti della matematica.

Programma

1. PREREQUISITI. Spazi funzionali: spazi metrici, completezza, spazi di Banach, teorema delle contrazioni (cd), spazi normati, prodotto scalare, spazi di Hilbert. Esempi. Spazi di successioni. Applicazione del teorema delle contrazioni al problema di Cauchy per un sistema di n equazioni del 1° ordine (esistenza ed unicità, cd).
   Riferimento: [PS] Cap. 3 da p. 117 a p. 126. Da p. 136 a p. 145. Spazi di successioni: p. 148-149. Problema di Cauchy: da p. 208 a 211.
2. PREREQUISITI. Generalità sulla serie di Fourier: definizioni e esempi. Convergenza della serie di Fourier, disuguaglianza di Bessel (sd) e conseguenze. Teoremi di convergenza puntuale (2.18) e uniforme (2.22), entrambi sd.
   Riferimento: [PS] da p. 170 a p. 188.
3. Misura di Lebesgue degli insiemi di R^n. Insiemi e funzioni misurabili. Esempi, insieme di Cantor. Integrabilità secondo Lebesgue. Proprietà salienti dell'integrale di Lebesgue. Uguaglianza di Parseval. Applicazioni: Teorema della convergenza dominata, convergenza monotona, integrabilità sotto il segno di serie e di successione. Derivazione sotto il segno di integrale.
4. Gli spazi L^1 e L^2. Applicazioni alle serie di Fourier. Prop. 2.1 (sd), Prop. 2.2 (cd), Teor. 2.3 (sd), Teor. 2.4 (sd), Prop. 2.10 (cd), Prop. 2.11 (cd), Prop. 2.12 (cd), Prop. 2.13 (cd), prop. 2.14 (sd), Prop. 3.1 (cd), Prop. 3.2 (cd) Teor. 3.3 (sd), Teor. 3.4 (cd), Cor. 3.5 (cd), Lemma 3.6 (cd), Teor. 3.7 (cd), Cor. 3.8 (cd) e 3.9 (cd), Teor. 3.10 (cd), Teor. 3.17 (cd)
5. Appendice: misura e dimensione. La dimensione degli insiemi frattali.
   Riferimento per i punti 3-4-5: [PS] da p. 377 a p. 421 e da p. 430 a p. 435.
6. Generalità sugli spazi L^p. Definizioni e proprietà di base. Disuguaglianza di Holder (cd), L^p è uno spazio vettoriale (cd), teorema di Fisher-Riesz (cd).
   Riferimento: [BR]: Cap. 4 da p. 83 a p. 91 (escluso teor. IV.9)
7. Trasformata di Fourier. Definizioni e proprietà. Uniforme continuità (cd), teorema di Riemann-Lebesgue (sd) Proprietà generali (teor. 5.1.3, cd). Derivata e Trasformata di Fourier (teor. 5.2.1, cd). Trasformata e convoluzione (teor. 5.3.1, cd). Formula di moltiplicazione (cd). Uguaglianza di Parseval (cd). Insufficienza della trasformata di Fourier e definizione della trasformata di Laplace.
   Riferimenti: [DiFF]: cap. 5, da p. 141 a p. 153. Cap. 6: p. 161, 162, 163.

8. Applicazione della serie di Fourier e della trasformata di Fourier al caso della corda vibrante.
   Riferimento: [MY] p. 635, 636 e 641.
9. Applicazione della trasformata di Fourier alla teoria dei segnali: introduzione al problema e teorema del campionamento di Whittaker-Shannon-Kotel'nikov (cd). Riferimento: [ZA] p. 01-17
10. Introduzione all’analisi complessa. Richiamo sui numeri complessi, funzioni di variabile complessa (esempi). Funzioni olomorfe, teorema di Cauchy-Riemann (teor.3.3.1 cd). Esempi. Integrali su cammini, lemma di Darboux (cd), teorema di Cauchy-Goursat (cd), prima e seconda formula di Cauchy (cd). Primitive delle funzioni complesse. Prop 3.5.1 (cd) e teor. 3.5.2 (cd), teor. di Morera (cd). Serie di potenze ed analiticità delle funzioni olomorfe. Lemma di Abel (cd), prop 3.6.1, teor. di Abel (sd), teor 3.7.1 (cd), esempi. Serie di Laurent e zeri di una funzione olomorfa. Teor. di Laurent (sd), teor. 3.9.1 (cd), teor 3.9.2, teor 3.9.3 (sd). Singolarità delle funzioni olomorfe, teor. 3.10.1 (cd), teor 3.10.2 (sd), teor. di Picard (sd), teor. di Casorati (cd). Teorema dei residui ed applicazioni. Esercizi.

    Riferimento: [DiFF] p. 40-116

Testi di riferimento *(testi adottati e testi di consultazione)*

[PS] "Analisi Matematica", CD Pagani, S. Salsa – Vol. 2 - Masson editore
[BR] "Analisi Funzionale" H. Brezis – Liguori Editore
[DiFF] "Metodi matematici per l'ingegneria" Giuseppe Di Fazio, Michele Frasca – Monduzzi Editore
[MY] "Lezioni di matematica Generale" A. Myskis – Edizioni MIR
[ZA] "Advances in Shannon's sampling theory" A. Zayed – CRC Press

Strumenti didattici
Lavagna tradizionale, proiezione di trasparenze, personal computer

Metodi didattici
Insegnamento tradizionale su lavagna, esercizi e *laboratorio* in collaborazione con gli studenti del corso.

Lingua di insegnamento:
Italiano

Materiale didattico a disposizione degli studenti
Dispense del docente ad integrazione dei libro di testo adottato.

Modalità di iscrizione all’esame
Non è prevista alcuna iscrizione all’esame purché sia rispettata la calendarizzazione annuale come da *diario degli esami* del CdS. Per la prova lo studente ha comunque la possibilità di

concordare la data col docente, anche al di fuori delle date previste dal calendario degli esami.

Modalità d'esame

La prova orale alla lavagna è della durata di circa 45 min. con domande sulle parti principali del programma svolto. Il voto finale, espresso in trentesimi, tiene conto della preparazione dello studente su ciascuno degli argomenti trattati.

Commissione d'esame *(facoltativo se la commissione è consultabile su un calendario esami)*

L. Cadeddu, F. Cuccu, G. Porru